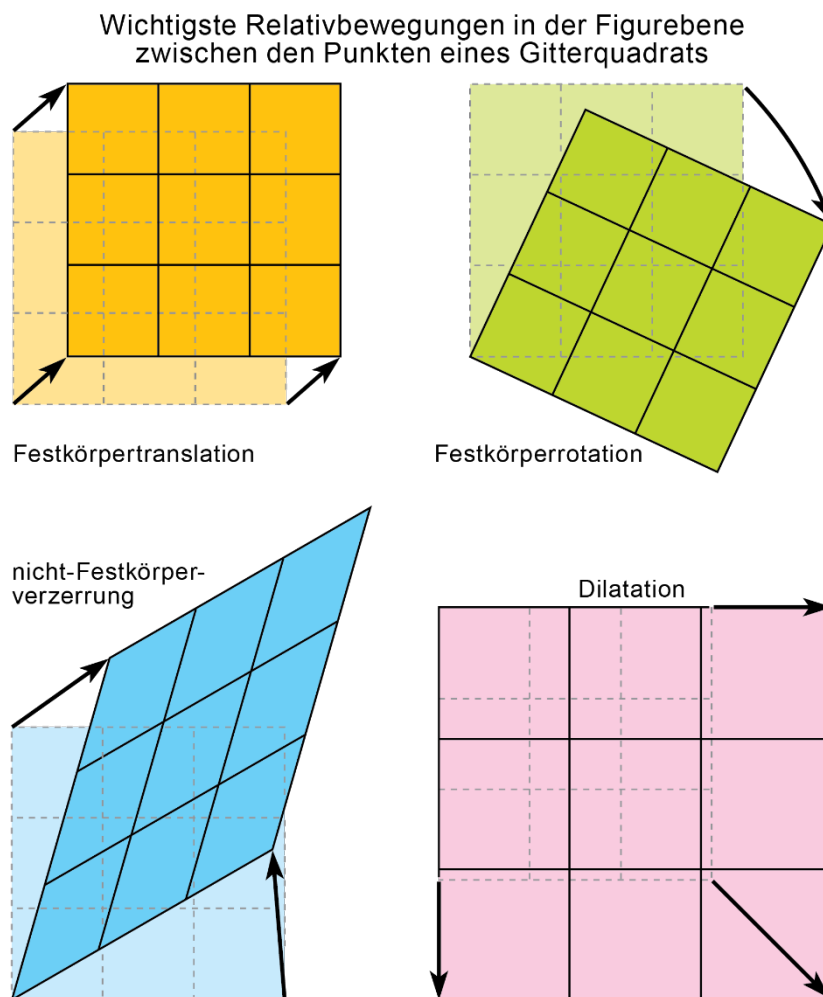


MECHANISCHE ASPEKTE DER DEFORMATION

Die Mechanik befasst sich mit den Auswirkungen, die **Kräfte** (*forces*) auf **Körper** (*bodies*) ausüben. Ein fester Körper, der äusseren Kräften ausgesetzt ist, tendiert dazu, sich zu verschieben und seine Form zu verändern. Während der **starren Festkörperverschiebung** (*rigid body motion*) werden die Gesteine verschoben und/oder rotiert, wobei die ursprüngliche Grösse und Form erhalten bleiben.

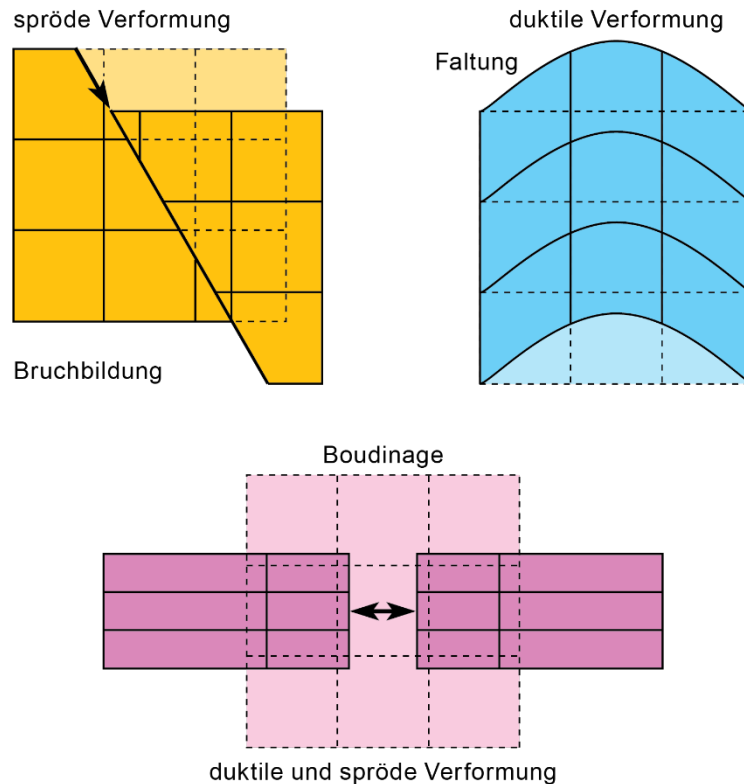
Wenn die auf den Körper einwirkende Kraft teilweise oder vollständig vom Körper selbst absorbiert wird, statt den Körper zu verschieben, wird er **unter Spannung** gestellt (*stressed*). Diese Kräfte bewirken dann die Bewegung der Teilchen im Körper. Somit verändert der Körper seine Form, d.h. er wird verformt. Unter **Verformung** (*strain*) versteht man die Deformation (*non-rigid-body deformation*) eines Gesteins infolge von Spannungseinflüssen.

In der Erde sind die wichtigsten Kräfte seit Langem aktiv. Sie sind auf die **Schwerkraft** (*gravity*) und die **relativen Bewegungen** grosser Gesteinsmassen in der Kruste und im oberen Mantel zurückzuführen. Andere mögliche Kräfte sind meist klein oder nur für kurze Zeiträume aktiv, sodass keine bedeutende Verformung entsteht.



Kräfte, die mit der Bewegung im Zusammenhang stehen, spielen über einen langen Zeitraum eine Rolle. Die Strukturgeologie untersucht permanente Deformationen (sogenanntes „**Versagen**“, „*failure*“, von Gesteinen), und produziert **Strukturen** (*structures*) wie Falten und Störungen in Gesteinen. Wenn ein Gestein bricht und seine Kohäsion verliert, ist es **spröd** (*brittle*). Wenn sich das Gestein ohne Kohäsionsverlust in komplizierte Formen verformt, die bestehen bleiben, wenn die Kraftwirkung aufhört, so hat das Gestein eine permanente **Verformung** (*strain*) aufgenommen und ist selbst **duktil** (*ductile*).

Arten von Strukturen



Das **Verhalten** (*behaviour*) der Gesteine, das heisst, ob sie sich permanent oder nicht permanent verformen, ob die Verformung überwiegend durch duktilen, spröden oder einen anderen Deformationsprozess entsteht, hängt von der Wechselwirkung einer Vielzahl physikalischer und chemischer Faktoren ab. Deshalb ist ein genaues Verständnis des Deformationsprozesses wichtig. Wir konzentrieren uns in dieser Vorlesung darauf, einige dieser Faktoren zu prüfen, und eine physikalische Einsicht darin zu gewinnen, wie sich Gesteine in der Natur verformen. Die Beschreibung eines jeden Deformationsprozesses umfasst die Bestimmung der angewandten Last (Kraft), was das Ziel einer **dynamischen Analyse** (*dynamic analysis*) ist. Tatsächlich lassen sich entscheidende Faktoren der Gesteinsdeformation abschätzen, indem man leicht messbare Materialeigenschaften wie die Fließspannung als Funktion von Verformung, Verformungsrate und Temperatur verwendet und diese auf eine grosse Anzahl von Gesteinen anwendet. Diese Diskussion definiert also die Konzepte von Spannung, Verformung, Rheologie sowie Bewegungsgleichungen. Niemand kann Spannungen direkt sehen, aber aus der resultierenden Deformation kann man auf sie schliessen. Diese Vorlesung wird mit diesem Thema beginnen und die dafür notwendige Vektorrechnung einführen.

Physikalische Definitionen

Kontinuierliche Medien

Gesteine sind komplizierte Ansammlungen aus Kristallen, Körnern, Flüssigkeiten usw. deren Eigenschaften und physikalische Parameter sich kontinuierlich verändern. Kontinuierliche Variation bedeutet, dass diese Parameter räumliche Ableitungen aufweisen. Deswegen ist es notwendig, infinitesimal kleine Materialvolumina zu betrachten, in denen die physikalischen Eigenschaften überall gleich sind. Dies nennt man ein kontinuierliches Medium, das reale Materialien modelliert, ohne ihre feine Struktur (z.B. die atomare Grösse) zu betrachten. In der folgenden Diskussion zur Mechanik werden die Gesteine als kontinuierliche Medien betrachtet.

Newton'sche Axiome: Gesetze der Bewegung

Die newtonschen Axiome machen Aussagen über den Bewegungszustand von Körpern in Abhängigkeit von einer äusseren Grösse, der **Kraft** (*force*), und einer Eigenschaft des Körpers: der **Masse** (d.h. die Menge an Material in einem Körper). Auf dem Gebiet der **Dynamik** sollen nun die treibenden Kräfte der Bewegung untersucht werden. Da Deformation die relative Bewegung zwischen Punkten ist, werden die drei newtonschen Gesetze der Bewegung als grundlegende Axiome angenommen.

Gesetz 1: (Trägheitsprinzip)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht von aussen durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die Geschwindigkeit eines solchen sich «frei» bewegenden Körpers ist nach Betrag und Richtung konstant.

Gesetz 2: (Aktionsprinzip)

Die Änderung der Bewegung (Beschleunigung) ist proportional zur auferlegten Kraft und verläuft in die Richtung der Kraft.

Gesetz 3: (Reaktionsprinzip)

Eine wirkende Kraft F ruft immer eine gleich grosse, entgegengerichtete **Gegenkraft** (Reaktionskraft $F_R = -F$) hervor; die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich und von entgegengesetzter Richtung (*actio = reactio*); z. B. der fallende Stein zieht die Erde ebenso stark an wie die Erde den Stein.

Physikalische Dimensionen / Grössen

Die mechanischen Eigenschaften eines Materials können mit den drei unabhängigen, grundlegenden physikalischen Grössen (d.h. messbaren Parametern) **Länge** [L], **Masse** [M] und **Zeit** [T] ausgedrückt werden. [] bedeutet „in der Einheit“. Andere Dimensionen, wie z. B. elektrische Ladung [Q] und Temperatur [θ], sind **abgeleitete Dimensionen**.

Eine Grösse/Einheit ist die numerisch skalierte Magnitude einer physikalischen Dimension. Konventionell werden die Grössen bzw. Einheiten im *Système international d'unités* (SI-Einheiten) angegeben. Diese Einheiten sind für Länge, Masse und Zeit: Meter (m), Kilogramm (kg) und Sekunde (s).

- Ein Meter ist die Distanz, für die das Licht im Vakuum $1/299'792'458$ Sekunden benötigt.
- Ein Kilogramm ist die Masse, die durch den internationalen Kilogrammprototyp (auch als Urkilogramm bezeichnet), der im *Bureau International des Poids et Mesures* in Sèvres (Frankreich) aufbewahrt wird, definiert ist.
- Eine Sekunde ist das „ $9'192'631'770$ -fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-Niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung festgelegt“ (nach dem Zertifikat in Investment Performance Measurement) bei einer Temperatur von 0 K.

Kraft

Eine Kraft beeinflusst oder verändert die Bewegung eines Körpers.

Mathematischer Ausdruck

Die Kraft bezeichnet sowohl eine **Grösse** (*magnitude*) als auch eine **Richtung** (inkl. **Orientierung**; *direction and sense*). Deswegen ist die Kraft $\vec{F}$ ein Vektor, der den Regeln der Vektoralgebra folgt. Gewöhnlich wird die Kraft als Pfeil in einem Koordinatensystem dargestellt:

- Die Länge der Linie spezifiziert die Grösse (Magnitude) der Kraft (wie stark ein Stoss ist).
- Die Orientierung der Zeile (räumliche Orientierung der Linie) spezifiziert die Richtung der Kraft

Spannungen

jpb-2026

- Eine Pfeilspitze weist in die Einwirkungsrichtung der Beschleunigung (in die Richtung, in die der Stoss wirkt).

Wird auf einen Körper mit einer Masse m eine Kraft F , so wird er in Richtung der Kraft beschleunigt (newtonsches Aktionsprinzip, auch Beschleunigungsprinzip genannt). Die Beschleunigung $\vec{a}$ eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse m und direkt proportional zur auf ihn wirkenden Kraft.

$$\vec{a} = \vec{F}/m \Leftrightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Diese Relation kann geschrieben werden als:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{v}}{t} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

wobei $m\vec{v}$ das Produkt der Masse und der Geschwindigkeit ist das, was dem Impuls entspricht, und t ist die Zeit.

Die uns am meisten vertraute Kraft ist das Gewicht, oder korrekt die Gewichtskraft. Das ist per Definition die Kraft, die eine Masse (Produkt von Volumen und Dichte) in Richtung der Gravitationsbeschleunigung erfährt, und die deshalb normal zur Erdoberfläche ist.

Wie jede Vektorgrösse, kann auch eine Kraft entsprechend der Parallelogramm-Regel der Vektoranalyse in drei **Komponenten** (*components*) aufgespalten werden, z.B. $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ und $\vec{F}_z$, welche parallel zu den Koordinatenachsen (x, y, z) sind. Dies wird gewöhnlich in Spaltenform geschrieben:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Orientierung

Aus der Vektoranalyse lässt sich entnehmen, dass zwei Vektoren eine Ebene definieren. Dies hilft, die Orientierungen zu bestimmen. Diese erste Definition ist äusserst nützlich bei 3D-Anwendungen, da man durch das Produkt der beiden Vektoren einen Vektor senkrecht zu den beiden anderen Vektoren erhält, d.h. senkrecht zur Ebene, die die beiden Vektoren enthält. Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) ist ein Einheitsvektor (seine Länge ist 1). Die praktische Anwendung ist das normale kartesische Koordinatensystem, wobei $\vec{i}$ der Einheitsvektor entlang der x-Achse (also senkrecht zur YZ-Ebene), $\vec{j}$ der Einheitsvektor entlang der y-Achse (senkrecht zur xz-Ebene) und $\vec{k}$ der Einheitsvektor entlang der z-Achse (senkrecht zur xy-Ebene) ist. Die Kraft kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = F_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + F_z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oder

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z$$

mit $\vec{e}_i$ dem Einheitsvektor der i-Achse.

Wenn die drei Vektorkomponenten geschrieben werden, d.h. die Länge jedes Vektors entlang aller 3 Achsen, können die Einheitsvektoren weggelassen werden, sodass die Koordinaten zu den Koeffizienten $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ in Teilen der Gleichung vereinfacht werden können. Der Vektorsatz, der

durch die drei Zahlen und das Koordinatensystem definiert wird, wird mathematisch als ein Tensor erster Ordnung beschrieben.

Kräfte und Kraftkomponenten addieren sich wie Vektoren.

Dimension

Die Einheit und die Dimension der Kraft werden mit Hilfe der Bewegungsgleichung der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ definiert. Die Dimension hat die Form:

$$[F] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

Die Masse ist eine skalare Grösse, d.h. es erfordert nur eine Zahl, um sie zu definieren. Die Einheit ist ein Kilogramm (1 kg). Ein Skalar ist mathematisch ein Tensor der Stufe 0.

Die Definition der Beschleunigung setzt ein Koordinatensystem voraus.

Das Newton und das Dyn sind die Grundeinheiten der Kraft. 1N ist die Kraft, die benötigt wird, um einen Körper von 1 kg mit 1m/s^2 zu beschleunigen:

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{s}^{-2} = 10^5 \text{ Dyns}$$

Die uns am meisten vertraute Kraft ist das Gewicht, oder korrekt die Gewichtskraft. Das ist per Definition die Kraft, die eine Masse (Produkt von Volumen und Dichte) in Richtung der Gravitationsbeschleunigung erfährt, und die deshalb normal zur Erdoberfläche ist.

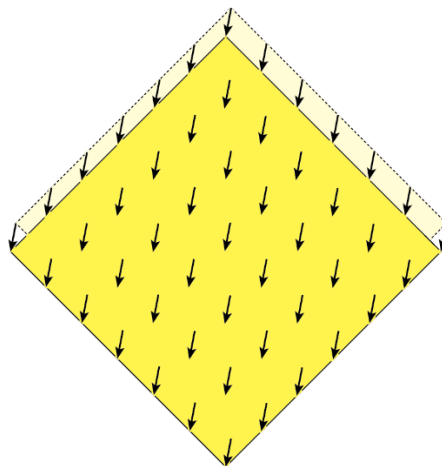
Körperkräfte - Oberflächenkräfte

In der Geologie gibt es zwei grundlegende Klassen von Kräften. **Körperkräfte** (*body forces*) wirken auf die gesamte Masse eines Körpers und hängen von der Menge an Material im Körper (d.h. dem Gewicht) ab. **Oberflächenkräfte** (*surface forces*) wirken an Oberflächen.

Körperkräfte

Äussere Kräfte, die von der Ferne (Schwerkraft, elektromagnetische Felder usw.) auf jedes Partikel des Körpers wirken, sind Körperkräfte. Nehmen Sie als Beispiel das Gewicht des Bleistifts: Gravitation wirkt auf das Bleistiftsvolumen und ist proportional zur Menge an Material in diesem Volumen. Volumenkräfte sind demzufolge proportional zur Masse und zum Volumen des Körpers.

Körperkraft
(Kräfte, die auf jeden Punkt eines Körpers wirken)



In rein mechanischen Systemen gibt es zwei Arten von Körperkräften, solche aufgrund der Gravitation und solche aufgrund der Trägheit.

Oberflächenkräfte

Spannungen

jpb-2026

Diejenigen Kräfte, die auf das Äussere eines Körpers einwirken, z.B. zum Bewegen eines Bleistifts, sind Oberflächenkräfte oder **angewandte Kräfte** (*applied forces*). Oberflächenkräfte (z.B. Reibung) sind demzufolge proportional zur Grösse der Fläche, auf die sie einwirken. Oberflächenkräfte können auf imaginären oder realen Oberflächen innerhalb des Körpers einwirken und können durch das Wirken des Körpers auf sich selbst, wie z.B. die Spannung in einem ausgedehnten Gummiband, resultieren. Keine konkrete physikalische Oberfläche oder sichtbare Materialgrenze wird benötigt. Die Oberflächenkräfte werden normalerweise ausserhalb des betrachteten Körpers erzeugt und werden durch die mechanisch ununterbrochene Region übertragen, die den Körper mit der Stelle verbindet, an der die Kraft angewendet wird. Z.B. können tektonische Kräfte von den Plattengrenzen auf die Platte übertragen werden.

Verhältnis von Körper- zu Oberflächenkräften

Gravitationskräfte sind proportional zur Masse. Das bedeutet, dass das Gewicht eines überlagerten Gestein Stapels eine erhebliche Kraft auf die tief liegenden Gesteine in der Kruste ausübt.

Im Allgemeinen ist jedes Massenelement in einem Zustand des dynamischen Gleichgewichts, was heisst, dass die Summe der Volumenkräfte gleich und entgegengesetzt der Summe der Oberflächenkräfte ist. Wenn $d\ell$ eine charakteristische Länge eines kleinen Körperelementes ist, dann können wir für das Verhältnis von Körper- zu Oberflächenkräften schreiben:

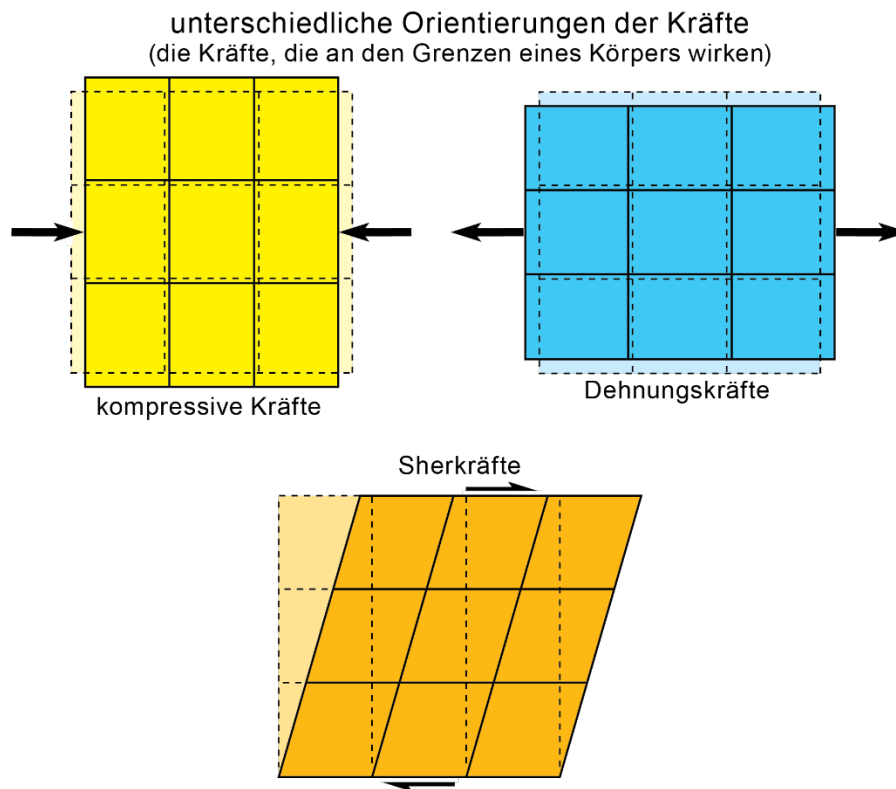
$$\frac{\text{Körperkräfte}}{\text{Oberflächenkräfte}} = K \frac{(d\ell)^3}{(d\ell)^2}$$

mit K = Konstante, die gegen null geht, wenn $d\ell$ gegen null geht. Der Kraftunterschied impliziert, dass sich die Grösse der Körperkräfte schneller (erheblich für grosse $d\ell$) als die der Oberflächenkräfte verringert. Wenn das Volumenelement folglich klein ist, können die Körperkräfte, die mit sich selbst im Gleichgewicht sind, vollständig vernachlässigt werden. Die Skalierung zwischen Körper- und Oberflächenkräften hat zum Beispiel wichtige Folgen für das Bioengineering: Die Festigkeit eines Knochens ist proportional zu seiner Querschnittsfläche, aber das Gewicht eines Körpers ist proportional zu seinem Volumen. Die Knochen grosser Tiere haben deshalb ein grösseres Durchmesser-Längen-Verhältnis, um die verhältnismässig höheren Gewichte zu halten. Solche Beziehungen in der Skalierung beeinflussen auch mechanische Deformationsprozesse. Zum Beispiel hat George Gabriel Stokes 1851 eine Lösung für die Geschwindigkeit einer Kugel hergeleitet, die in einem viskosen Fluid mit niedrigerer (oder höherer) Dichte absinkt (oder aufsteigt). Diese Geschwindigkeit vergrössert sich mit dem Quadrat des Kugelradius, weil die Auftriebskräfte verhältnismässig stärker ansteigen als die Reibungskräfte, die auf die Kugeloberfläche entgegenwirken. Ähnliche Beziehungen zwischen Auftriebs- und Reibungskräften haben wichtige tektonische Folgen für den Aufstieg von Diapiren und das Absinken von lithosphärischen Platten in den Mantel.

Gerichtete Kräfte

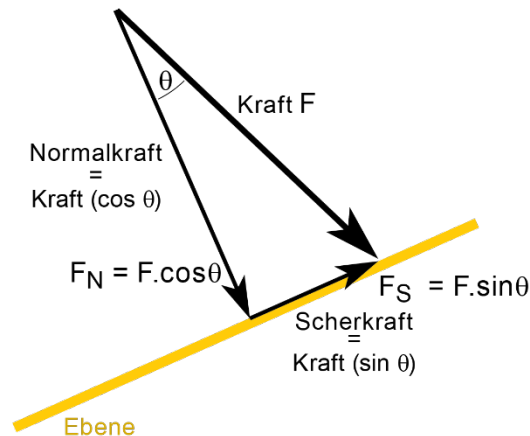
Gerichtete Kräfte (*directed forces*) wirken in eine bestimmte Richtung. In der Geologie ist:

- **Kompression** (*compression*): ein Paar entgegengesetzter Kräfte, die dazu tendieren, den Körper zu komprimieren.
- Unter **Zug** (*tension*) versteht man ein Paar entgegengesetzter Kräfte, die dazu geeignet sind, einen Körper auseinanderzureissen.
- **Scherung** (**Scherkraft**; *shearing, shear forces*) wird durch ein gekoppeltes Kräftepaar erzeugt, das in derselben Ebene liegt, jedoch in entgegengesetzter Richtung ausgerichtet ist.
- **Torsion** (*torsion*) ist eine Kraft, die einen Körper verdrehen lässt (Drillkraft, "Schraubenkraft").



Normal- und Scherkomponenten

Eine Oberflächenkraft $\vec{F}$, die auf eine Ebene wirkt, ist im Allgemeinen schräg zur Oberfläche und lässt sich in zwei Vektorkomponenten aufteilen.



Vektorielle Auflösung einer Oberflächenkraft
in ihre Normal- und Scherkomponente

Diese Komponenten sind:

- Die **Normalkraft** (*normal force*) $\vec{F}_N$, die senkrecht zur Ebene steht;
- Die **Scherkraft** (*shear force*) $\vec{F}_S$, die parallel zur Ebene gerichtet ist:

$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_S$$

Die Scherkomponente erleichtert das Gleiten auf der Ebene, während die Normalkomponente dazu neigt, es zu verhindern, da beide Seiten der Ebene einander zuneigen. In zwei Dimensionen sind $\vec{F}$, $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_S$ koplanar; die zwei senkrechten Komponenten sind gemäss Rechtwinkeldreiecken definiert:

$$F_N = F \cos \theta$$

$$F_S = F \sin \theta$$

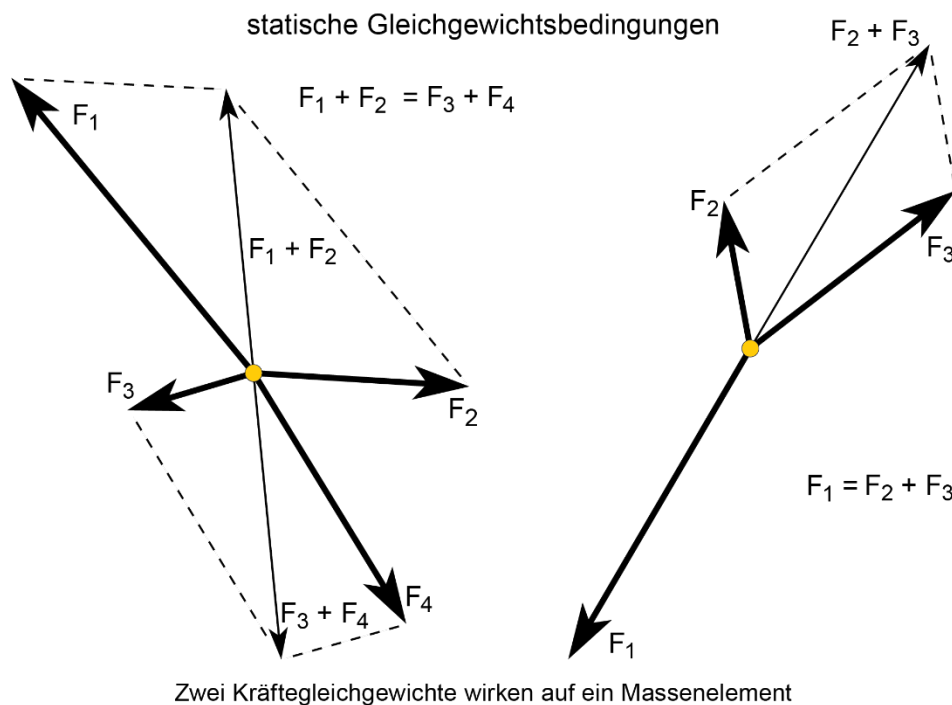
wobei θ der Winkel zwischen der angewandten Kraft und der Flächennormalen ist. Die Grösse wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt:

$$F^2 = F_N^2 + F_S^2$$

Diese Gleichungen zeigen, dass man (i) die Grösse des angewandten Kraftvektors und (ii) den Winkel zwischen dem Kraftvektor und der Fläche kennen muss, um die Grösse der Komponenten zu bestimmen.

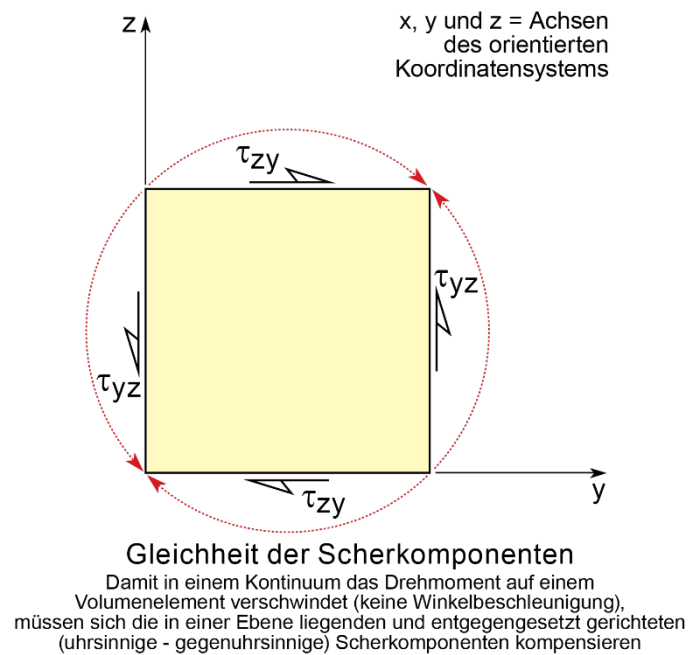
Aktion / Reaktion; statische Gleichgewichtsbedingungen

Stellen Sie sich einen Gesteinswürfel innerhalb einer grossen Gesteinsmasse vor. Das Gestein wird als kontinuierliches Medium betrachtet. Alle sechs Flächen dieses Würfелеlements werden durch die angrenzenden Teile des umgebenden Gesteins angedrückt und das Material innerhalb des Würfels reagiert entsprechend. Diese Situation entspricht dem grundlegenden Reaktionsprinzip (*actio=reactio*), das besagt, dass Kräfte, die paarweise auftreten, in der Grösse gleich sind, aber in entgegengesetzter Richtung wirken. Zudem ist jedes Atom innerhalb des Würfels der Schwerkraft unterworfen, ebenso jedes Atom ausserhalb des Würfels. Daher kann die überall gleichartige Körperkraft in einem ersten Ansatz als abwesend betrachtet werden.



Unter natürlichen **statischen Gleichgewichtsbedingungen** (*static equilibrium*; der Gesteinswürfel bewegt sich nicht und wird nicht deformiert) müssen die Kräfte an den gegenüberliegenden Flächen im Gleichgewicht stehen. Wenn man diesen Zustand betrachtet, kann man die geologischen Kräfte am besten verstehen.

Diese Situation tritt auf, wenn die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte null ist. Dies setzt voraus, dass Normalkräfte auf gegenüberliegenden Flächen dieselbe Magnitude haben, jedoch entgegengesetzte Orientierung haben. Scherkräfte auf den gegenüberliegenden Flächen (zwei auf jeder Fläche) müssen ebenfalls im Gleichgewicht stehen, um eine Rotation des Würfels zu verhindern.



Vereinfachend können die Kanten des Würfels als die Hauptachsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems angenommen werden. Daraus folgt, dass sich die Scherkomponente entlang der Kanten der betrachteten Fläche in zwei Scherkomponenten auflösen lässt.

Spannung in einem kontinuierlichen Medium

Die Spannung verursacht die Verformung eines Körpers.

Definition

Die Grösse der Kräfte, die auf die Flächen des Würfels einwirken, hängt vom Flächeninhalt ab. Je grösser der Würfel, desto grösser muss die Kraft sein, um eine Formänderung oder eine Bewegung zu bewirken. Die Situation wird durch eine Variation der Grösse und Richtung der Kräfte von Punkt zu Punkt auf jeder Würfelfläche leicht verkompliziert. Es ist deshalb vorteilhaft, ein Mass zu haben, das von der Grösse des in Betracht gezogenen Würfels unabhängig ist. Diese Vereinfachung geschieht, indem man sich vorstellt, der Würfel werde auf einen würfelförmigen Punkt verkleinert, dessen Flächen eine infinitesimale Grösse $A = 1$ haben. Der würfelförmige Punkt repräsentiert alle möglichen Orientierungen einer Fläche im Raum.

Die Bedeutung des Bereichs, auf den eine Kraft ausgeübt wird, ist uns allen intuitiv bekannt. Die Füsse sinken beim Gehen auf Schnee ein, weniger, wenn man Schneeschuhe trägt, und man kann sogar auf Skiern ausrutschen. Die Kraft (Gewicht der Person), die auf den Schnee wirkt, bleibt dieselbe, aber durch die Vergrösserung der Kontaktfläche wird die Belastung des Schnees verringert. Dies zeigt, dass die Spannung und nicht die Kraft die Verformung von Materialien (hier Schnee) kontrolliert. Daher muss man mit Spannung arbeiten, um die Verformung von Gesteinen zu untersuchen.

Zugkraft

Die **Zugkraft** (*traction*) T verkörpert die Kraftintensität in Bezug auf die Oberfläche, auf der die Kraft ausgeübt wird. Wird die Kraft F gleichmässig über eine grosse Fläche verteilt, so ist:

$$T = \frac{F}{A}$$

Wenn die Richtung und Intensität der Kraft über die Fläche variieren, sollte die Traktion nur an einem infinitesimal kleinen Bereich als Punkt definiert werden. Mit dem imaginären kubischen Punkt wird Traktion formal als **Kraft pro Flächeneinheit**, die an einem bestimmten Ort in eine bestimmte Richtung auf den Würfel einwirkt, definiert.

Eine genauere Definition der Zugkraft an einem Punkt wird gegeben durch das beschränkte Verhältnis von Kraft $\Delta \vec{F}$ zur Fläche ΔA , wenn es der Grösse der Fläche ΔA erlaubt ist sich zu verringern und null anzunähern (Cauchy-Grundregel):

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

In dieser Gleichung ist $\Delta \vec{F}$ ein Vektor, der eine Länge und eine Richtung hat.

Die Zugkraft ist ebenfalls ein Vektor, welcher durch drei Quantitäten definiert ist:

- seine Grösse;
- seine Orientierung;
- die Orientierung der Fläche, auf die er wirkt. Diese Fläche wird definiert durch den Flächeninhalt A und den normalen Einheitsvektor $\vec{n}$.

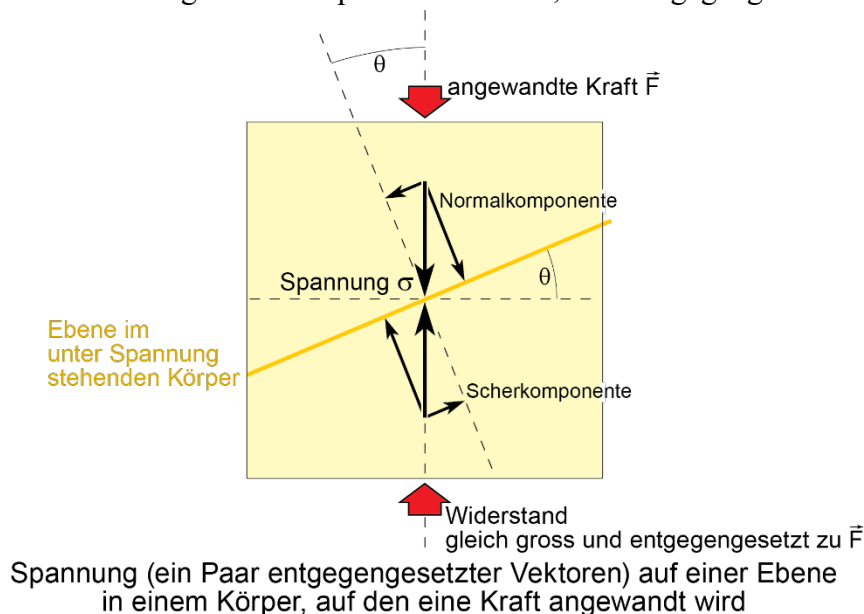
$$\vec{F} = \vec{T} \cdot A \cdot \vec{n}$$

Achtung: Kraft und Flächennormale sind Vektoren (gerichtete Grössen) und im Allgemeinen nicht parallel zueinander.

Diese Definition enthält zwei Richtungskomponenten: eine für die Kraft und eine für die Orientierung der Fläche. Die Definition zeigt, dass die Zugkraft ein **gebundener Vektor** ist. Dieser Vektor kann sich auf einer gegebenen Fläche von Punkt zu Punkt ändern und auf eine Vielzahl von Flächen wirken, die durch jegliche Punkte verlaufen und unterschiedliches Ausmass haben. Die Zugkraft wird folglich immer in Bezug auf eine bestimmte Fläche ausgedrückt.

Spannung

Unter der Annahme des mechanischen Gleichgewichts (Gesetz der Bewegung, 3. Reaktionsprinzip) baut eine Zugkraft auf die externe Oberfläche eines Körpers interne Zugkräfte innerhalb des Körpers auf. Die interne Zugkraft wird über dieselbe Gleichung wie die externe definiert; daher gibt es auf beiden Seiten des würfelförmigen Kontaktpunkts dieselben, aber entgegengesetzten Zugkräfte.



Dieses Paar ausgeglichener Zugkräfte ist die **Spannung (stress)**. Die Spannung wird auf Punkte eines Körpers, etwa die Federspannung, angewendet: Es gibt gleiche und entgegengesetzte Kräfte auf die anderen (versteckten) drei versteckten Flächen des kubischen Punkts. Die Spannung umfasst sowohl die Aktion als auch die Reaktion. Die Spannung ist deshalb ein **Paar gleicher und entgegengesetzter Kräfte**, die auf die Einheitsfläche des Körpers wirken. Die Spannung wird durch das Material über

das zwischenatomare Kraftfeld übertragen. Der Körper befindet sich dann in einem **Spannungszustand** (*state of stress*).

Dimension

Sowohl Spannung als auch **Druck** (*pressure*) beinhalten die physikalische Dimension der Kraft und die Dimension der Fläche, auf die die Kraft wirkt:

$$[M \cdot L T^{-2}] / [L^2] = [Masse \cdot Länge^{-1} \cdot Zeit^{-2}]$$

Die Einheiten, die heutzutage in der Geologie am häufigsten gebraucht werden, sind Pascal (1 Pa = 1 Newton m⁻²; 1 N = 1 kg m s⁻²) und Bar (1 bar = 10⁵ Pa ≈ 1 Atmosphäre). Die Geologen benutzen häufiger 1 Megapascal (MPa) = 10⁶ Pa. Eine nützliche Zahl, insbesondere für Diskussionen mit metamorphen Petrologen, ist 1 kb = 100 MPa.

Komponenten der Spannung

Mit einem infinitesimal kleinen Würfel können wir die Körperkräfte gegenüber den Oberflächenkräften vernachlässigen. Demzufolge sind die Körperkräfte mit sich selbst im Gleichgewicht. Dann können wir den dreidimensionalen **Spannungszustand in einem Punkt** betrachten (d.h. in einem unendlich kleinen Würfel; *state of stress at a point*). Da die Spannung ohne Angabe der Ebene, auf die sie wirkt, nicht bestimmt werden kann, müssen sowohl die Richtung der Kraft als auch die Orientierung der Würfebene berücksichtigt werden.

Die Kraft (und die Zugvektoren) an jeder Einheitsfläche des Würfels kann in drei orthogonale Komponenten zerlegt werden, eine normal zur Fläche (Normalkraft) und zwei parallel zur Fläche (Scherkräfte). Genauso können die Spannungen auf den Flächen eines infinitesimal kleinen Einheitswürfels in drei **Normalspannungen** (*normal stresses*) senkrecht zu den Flächen und dreimal zwei **Scherspannungen** (*shear stresses*) parallel zu den Kanten aufgeteilt werden, wobei jede Scherspannung parallel zu jeder gleichrangigen Richtung der Fläche ist.

- Der Normalspannung, die senkrecht zu einer Fläche übertragen wird, wird das Symbol σ zugeordnet.
- Den Scherspannungen, die parallel zu einer Fläche übertragen werden, wird das Symbol τ zugeordnet, obwohl oft σ in der Literatur verwendet wird.

Spannung in einem 'Punkt' in einem kontinuierlichen Medium

Der Spannungszustand in einem Punkt ist dreidimensional.

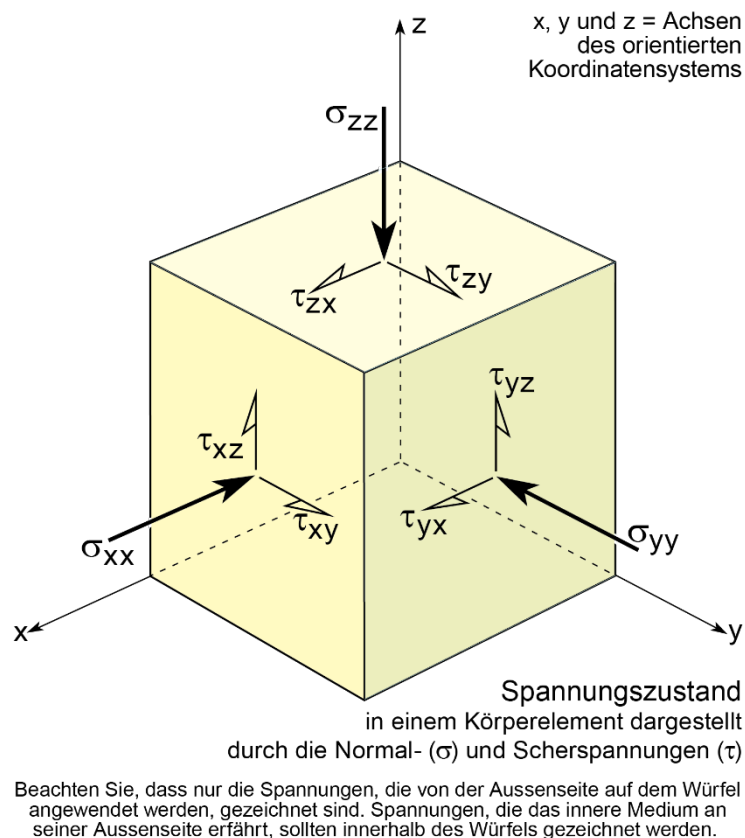
Es ist sinnvoll die Kanten des unendlich kleinen Würfels (die "Form" des Punktes) als ein System von kartesischen Koordinaten zu verwenden ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) und das Symbol σ_{ij} dazu zu benutzen, jene Spannungskomponente zu bezeichnen, die auf das Flächenpaar normal zu x_i einwirkt (um die Orientierung der Fläche zu identifizieren) und in Richtung x_j (um die Richtung der Zugkraft zu definieren). So kann man die Spannung auf einer Fläche in drei Komponenten aufteilen:

σ_{11} ist die Komponente der Normalspannung auf den Flächen normal zu x_1 .

τ_{12} und τ_{13} sind die zwei Komponenten der Scherspannung auf dem Flächenpaar normal zu x_1 , wobei eine jede entlang der anderen Koordinatenachsen x_2 und x_3 wirkt.

Für jedes Flächenpaar gibt es eine Fläche, für die die nach innen gerichtete Normalspannung, hier positiv, entgegengesetzt der Normalspannung ist, die auf die andere Fläche wirkt. Das Gleiche gilt für die Flächen normal zu x_2 und x_3 , so dass insgesamt neun Spannungskomponenten für die drei Flächen erhalten werden:

auf dem Flächenpaar normal zu x_1 :	σ_{11}	τ_{12}	τ_{13}		σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}
auf dem Flächenpaar normal zu x_2 :	σ_{22}	τ_{21}	τ_{23}	oder	σ_{yy}	τ_{yx}	τ_{yz}
auf dem Flächenpaar normal zu x_3 :	σ_{33}	τ_{31}	τ_{32}		σ_{zz}	τ_{zx}	τ_{zy}



Diese werden so geschrieben, dass alle Komponenten, die in derselben Ebene wirken, in einer Zeile stehen und alle Komponenten, die in derselben Richtung wirken, in einer Spalte stehen. Mit dem Symbol σ statt τ , können diese wie folgt beschriftet werden:

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix}$$

Diese geometrische Anordnung entspricht dem ursprünglichen Set der Koeffizienten, die eine **Spannungsmatrix** (*stress matrix*) bilden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Eine Matrix, die die gleiche Anzahl an Reihen und Spalten hat, nennt man eine quadratische Matrix. Wir können zusammenfassend diese Matrix von Koeffizienten als **T** oder **σ** oder als σ_{ij} bezeichnen und jedes Element identifizieren als:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Diese Gruppierung der neun Spannungskomponenten ist der **Spannungstensor** (*stress tensor*).

Zur Erinnerung: Mathematische Definitionen; Über was reden wir?

Skalar: eine Grösse mit einer Magnitude (d.h. eine reelle Zahl, wie z. B. für Masse, Temperatur, Zeit).

Vektor: ist ein geometrisches Objekt mit einer Grösse und einer Richtung (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung).

Tensor: ist eine mathematische Struktur mit einer Grösse und zwei Richtungen (zwei Vektoren). Ein Vektor (der Einheitsvektor) gibt die Aktionsebene (z. B. Durchlässigkeit, Belastung, Stress) an.

Der Spannungstensor stellt alle möglichen Zugvektoren an einem Punkt dar, unabhängig von der Orientierung der Fläche (d. h. der normalen Einheitsvektoren). Zusammenfassend wird der Spannungszustand an einem Punkt durch neun Komponenten beschrieben. Genauer gesagt, ist es ein symmetrischer Tensor, da die sechs Nicht-Diagonalkomponenten austauschbar sind; es ist ein Tensor zweiter Stufe, da er mit zwei Richtungen in Zusammenhang steht. Dementsprechend haben die Spannungskomponenten zwei tiefgestellte Indizes, wobei i, j und z gleichgültig und unabhängig sind und die Werte 1, 2, 3 annehmen können. Die Indizes i, j und z bezeichnen den Reihen- und Spaltenstandort eines Elements. Die Diagonalelemente $\sigma_{i=j}$ sind die Normalspannungen und die nicht diagonalen Elemente $\sigma_{i \neq j}$ entsprechen den Scherspannungen.

Wenn der elementare Würfel nicht rotiert (Gleichgewichtsbedingung, keine Winkelbeschleunigung und keine Volumenkraft), heben sich zwei Scherkomponenten jeweils auf den senkrechten Würfebenen gegenseitig auf: d.h. die **Drehmomente** (*torques*) um jede Achse müssen null sein:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_{21} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \\ \sigma_{31} &= \sigma_{13}\end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

Ein Drehmoment ist das Produkt aus dem Kraftvektor und dem senkrechten Abstand zwischen der Massemitte und der Kraft.

Da $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (Die tiefgestellten Indizes für die Magnituden der Scherspannungen sind kommutativ) ist die Spannungsmatrix symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

So reduzieren sich neun Komponenten der Spannungsmatrix auf sechs wahre, unabhängige Spannungskomponenten in einem Punkt:

Normalspannungen	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
Scherspannungen	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}

Deshalb sind für eine willkürlich ausgewählte Serie orthogonaler Achsen x, y und z sechs unabhängige Quantitäten nötig, um den Spannungszustand in einem Punkt vollständig zu bestimmen, d.h. für jedes Oberflächenelement, das durch den Punkt verläuft. Demgegenüber benötigen Kräfte nur drei Quantitäten: in Bezug auf eine Fläche, die den Punkt beinhaltet, können sie in Normal- und Scherkomponenten aufgeteilt werden.

Die kubische Darstellung hilft dabei, einen wichtigen Unterschied zwischen Spannungen und Kräften aufzuzeigen. Eine gerichtete Kraft kann in eine bestimmte Richtung wirken (sagen wir nach links), doch diese Aussage hat keinen Sinn, wenn sie auf innere Spannungen angewandt wird. Eine Spannungskomponente an einer Seite eines Flächenelements tritt nur im Zusammenhang mit einer Komponente gleicher Intensität und entgegengesetzter Richtung an der gegenüberliegenden Seite auf. Dies gilt für Normal- und Scherspannungen. Deshalb kann eine Spannung in vertikaler Richtung existieren, aber nicht nach oben oder nach unten.

Hauptspannungen

Selbst wenn sechs unabhängige Spannungsgrößen und beliebige Orientierungen den Spannungstensor vereinfachen, bleibt die Anwendung dieser Formulierung noch etwas mühsam. Glücklicherweise lässt sich diese Situation beträchtlich vereinfachen. In einem homogenen Spannungsfeld ist es immer möglich, drei gemeinsame orthogonale Ebenen zu finden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, und die so orientiert sind, dass die Scherspannungen τ verschwinden (null werden).

$$\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

In diesem Fall bleiben nur die normalen Komponenten der Spannung übrig und:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{wird} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Diese drei Ebenen ohne Scherspannung sind als **Hauptspannungsebenen** (*principal planes of stress*) bekannt und schneiden sich entlang drei zueinander senkrechter Linien, den sog. **Hauptachsen der Spannung**, auch **Hauptspannungsachsen** (*principal axes of stress*) eines betrachteten Punkts. Die Spannungskomponenten, die in Richtung dieser drei Achsen wirken, sind die **Hauptspannungen** (*principal stresses*) σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} . Sie werden je nach Betrag mit σ_1 , σ_2 und σ_3 , um eine Wiederholung der tiefgestellten Zeichen zu vermeiden, bezeichnet. Konvention ist, dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ist. Dies entspricht den **maximalen**, **intermediären** und **minimalen** Hauptspannungswerten. Anders gesagt: Die Hauptspannungen sind Normalspannungen, die auf Flächen ohne Scherspannung wirken. Die Hauptspannungsachsen stimmen mit den Hauptachsen des Spannungsellipsoids überein, das weiter unten definiert wird.

Achtung: Vorzeichenkonvention!! In der Physik und im Ingenieurbereich ist die Zugspannung, die dazu neigt, materielle Partikel auseinanderzuziehen, positiv und die Kompressionsspannung, die dazu neigt, die materiellen Partikel zusammenzudrücken, negativ. In der Geologie ist der Spannungszustand innerhalb der Erdkruste stets in Kompression, auch in Extensionsbereichen. Daher ist es üblich, die Kompressionsspannung positiv und die Zugspannung negativ zu bezeichnen. Z.B. in einer nicht tektonischen Umgebung, wird die Spannung in jeder möglichen Tiefe durch die Überbelastung erzeugt. Es ist eine zusammenpressende, vertikale Spannung, die einen zusammenpressenden horizontalen Druck verursacht. Auch an der Erdoberfläche entspricht die maximale Druckspannung dem atmosphärischen Druck. Scherspannungen sind positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Wenn die Grössen und Richtungen der drei Hauptspannungen in einem Punkt bekannt sind, können die Komponenten der Normal- und Scherspannungen auf jeder Fläche durch diesen Punkt berechnet werden.

Der Spannungszustand in einem Punkt kann deshalb durch drei Hauptspannungen und drei Richtungen (die Orientierung der drei Hauptspannungsachsen) vollständig beschrieben werden. Stimmen die Achsen der Hauptspannungen nicht mit den Koordinatenachsen überein, sind sechs unabhängige Spannungskomponenten erforderlich, um den Spannungszustand vollständig zu beschreiben.

Terminologie der Spannungszustände

Beispiele von speziellen Spannungszuständen sind:

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$	Einachsige Dehnung
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 > 0$	Einachsige Kompression
$\sigma_2 = 0$	Zweiachsige (ebene) Spannung
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	Allgemeine dreiachsige Spannung
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$	hydrostatischer Spannungszustand (<i>hydrostatic stress</i>), wobei die deviatorischen Spannungen null sind.

Wenn $p < 0$ (Dehnung) ist, wird der Spannungszustand als **hydrostatische Dehnung** (*hydrostatic tension*) bezeichnet. Hydrostatische Spannungen verursachen Volumenänderungen, jedoch keine Formänderungen im Material.

In der Geologie wird der **lithostatische Druck** (*lithostatic pressure*) oft dazu benutzt, den hydrostatischen Druck in einer Tiefe z unter der Erdoberfläche zu beschreiben, durch das Gewicht der Gesteine mit mittlerer Dichte ρ in der Gesteinssäule. Natürlich entspricht dies $\rho g z$ wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist. Jedoch erfordert diese Aussage eine Einschränkung, da sie annimmt, dass der Spannungszustand in der Tiefe z wirklich hydrostatisch ist, aufgrund des Relaxierens aller Scherspannungen durch Kriechprozesse. Wenn der Spannungszustand nicht hydrostatisch ist und man von einem Spannungszustand durch eine Gesteinssäule der Höhe z redet, dann beschreibt man diesen gewöhnlich als:

$$\sigma_1 \approx \int_0^z \rho g \cdot dz$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = [\nu/(1 - \nu)]\sigma_1$$

wobei ν die **Poissonzahl** (*Poisson's ratio*) ist.

Mittelspannung

Die **Mittelspannung** (*mean stress*) $\bar{\sigma}$ oder die **hydrostatische Spannungskomponente** p ist einfach das arithmetische Mittel der drei Hauptspannungen:

$$\bar{\sigma} = p = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

Dieser Druck ist eine invariante Grösse und unabhängig vom Koordinatensystem; er wird durch das Gewicht der Überlast (dem Umgebungsdruck) verursacht und ist durch gleichmässige Spannungsgrössen in alle Richtungen charakterisiert.

Erinnerung, grundlegende Terminologie:

In der Mathematik ist die Summe der Diagonalkomponenten eines Tensors, die sich bei der Drehung des Koordinatensystems nicht ändert, die **erste Invariante** (*first invariant*).

In der Erde beträgt der typische Wert etwa 30 MPa/km (d.h. ca. 3 kbar/10 km). Die Durchschnittsspannung spezifiziert folglich das durchschnittliche Niveau der normalen Spannung, die auf alle möglichen Störungsflächen wirkt und den Reibungswiderstand an diesen regelt. Andernfalls kann die Durchschnittsspannung nur eine Volumenänderung bewirken, entweder um sie zu verringern, wenn die Mittelspannung eine Kompression ist, oder um sie zu erweitern, wenn die Mittelspannung eine Dehnung ist.

Deviatorische Spannung

Es ist schwierig, Volumenänderungen in Gesteinen zu messen. Erkennbare Verformung tritt zusätzlich zu einer Volumenänderung auf. Daher steht Verformung gewöhnlich im Zusammenhang mit der Entfernung des Spannungszustands vom isotropen Zustand. Die **deviatorische Spannung** (*deviatoric stress*) drückt diesen Unterschied aus, indem die Mittelspannung vom allgemeinen Spannungstensor abgezogen wird. Unter Berücksichtigung, dass jeder mögliche Spannungszustand als die Summe einer hydrostatischen Mittelspannung p und einer deviatorischen Spannung betrachtet werden kann:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & s_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & s_3 \end{bmatrix}$$

Da p die Mittelspannung ist, es folgt $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Die zweite Matrix auf der rechten Seite ist der **Spannungsdeviator** (*stress deviator*). Seine Komponenten sind die **deviatorischen Spannungen** (*deviatoric stresses*). Der **Spannungsdeviator** (*principal deviatoric stress*) der Hauptspannungen

beinhaltet die Beträge, um wie viel jede Hauptspannung von der Mittelspannung abweicht. Sie bestimmen die effektive Scherspannung, welche die Intensität des deviatorischen Anteils angibt:

$$\tau_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} = \left[\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{1/2}$$

Die Aufspaltung in eine deviatorische Spannung s_{ij} und in eine volumetrische Spannung $\delta_{ij}\bar{\sigma}$, das Standard Kronecker Delta verwendend, wird geschrieben:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\bar{\sigma}$$

und die Normalspannung im Verhältnis zur Mittelspannung wird dann durch die deviatorische Spannung beschrieben:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\bar{\sigma}$$

Das Kronecker Delta ist eine mathematische Funktion, die als:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

definiert wird. Folglich:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{12} &= \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0 \end{aligned}$$

mit anderen Worten ist die Matrix:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

Die Identitätsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In einfacheren Worten, wenn $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, kann man sich vorstellen, dass zwei Komponenten auf das Gestein einwirken:

- die Mittelspannung: $p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$
- und drei deviatorische Spannungen: $s_1 = \sigma_{11} - p$
 $s_2 = \sigma_{22} - p$
 $s_3 = \sigma_{33} - p$

Bemerkungen:

- Eine Änderung des hydrostatischen Drucks wirkt ausschliesslich auf die Normalkomponenten der Spannung und lässt die Scherkomponenten unverändert.
- Alle Scherspannungen sind deviatorisch.
- Die grösste deviatorische Hauptspannung s_1 wird immer positiv und die kleinste, s_3 , wird immer negativ (oder bei Kompression positiv); die deviatorische intermediäre Spannung ist nahezu gleich der Mittelspannung. Die positive deviatorische Spannung neigt dazu, das Gestein in die Richtung ihrer Einwirkung zu verkürzen, während die negative (Zug-)deviatorische Spannung in die Richtung der relativen Verlängerung wirkt. Beachten Sie, dass der deviatorische Spannungstensor immer negative Komponenten enthält.
- Als logische Folge hinterlässt nur die deviatorische Spannung dauerhafte Verformungen in Gesteinen.

Differentialspannung

Die Differentialspannung σ_d ist die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Hauptspannung:

$$\sigma_d = (\sigma_1 - \sigma_3)$$

Sie ist im Allgemeinen für die Deformation verantwortlich, und bleibt vom hydrostatischen Druck unbeeinflusst. Ihre Grösse sowie die Eigenschaften der deviatorischen Spannungen beeinflussen die Art und Menge der Deformation, die ein Körper erfährt. Die Differentialspannung ist ein Skalar. Sie sollte nicht mit der deviatorischen Spannung, die ein Tensor ist, verwechselt werden.

Spannung, die auf einer vorgegebenen Ebene wirkt

Im folgenden Beispiel ist es wichtig, sich zu merken, dass die Spannungswerte mit der Orientierung und der Intensität der auferlegten Kraft variieren und sich auch ändern, wenn der Wirkungsbereich wechselt.

Eine Kraft F , die auf eine reale oder imaginäre Fläche P wirkt, wird in eine Normal- (F_N) und eine Scherkomponente (F_S) aufgeteilt. Diese Komponenten werden definiert durch:

$$F_N = F \cos \theta \quad \text{und} \quad F_S = F \sin \theta \quad (2)$$

Wir nehmen weiterhin an, dass der zuvor erwähnte kubische „Punkt“ zur Fläche P gehört.

Wir zeichnen den Schnitt eines Würfels, bei dem die vertikale Kraft F auf die Oberseite des Würfels mit der Fläche A einwirkt. F liegt in der Zeichnungsebene. Wir ignorieren jene Spannung, die zu dieser Schnittfläche orthogonal ist. Flächen werden bei dieser Betrachtung auf die Länge eines Segmentes reduziert.

Per Definition ist die Spannung die Wirkung der Kraft pro Einheitsfläche, was man sich als Intensität der Kraft vorstellen kann. Die Spannung σ auf eine Würfel­fläche hat die Grösse:

$$\begin{aligned} \text{Spannung} &= \text{Kraft} / (\text{Fläche des Würfels}) \\ \sigma &= F / A \end{aligned}$$

Durch den Würfel schneidet eine andere Ebene P , deren Normale mit einem Winkel θ zu F steht. Die Fläche der Ebene P ist:

$$\begin{aligned} P_{(\text{Fläche})} &= \text{Würfel}_{(\text{Fläche})} / \cos \theta \\ A_P &= A / \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Somit sind die Normalkomponenten der Kraft und der Spannung, die auf die Ebene P wirken:

$$F_N = F \cos \theta = \text{Würfel}_{(\text{Fläche})} \sigma \cos \theta = P_{(\text{Fläche})} \sigma \cos^2 \theta$$

und die Scherkomponenten

$$F_S = F \sin \theta = \text{Würfel}_{(\text{Fläche})} \sigma \sin \theta = P_{(\text{Fläche})} \sigma \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

Aus der allgemeinen Trigonometrie ist bekannt, dass:

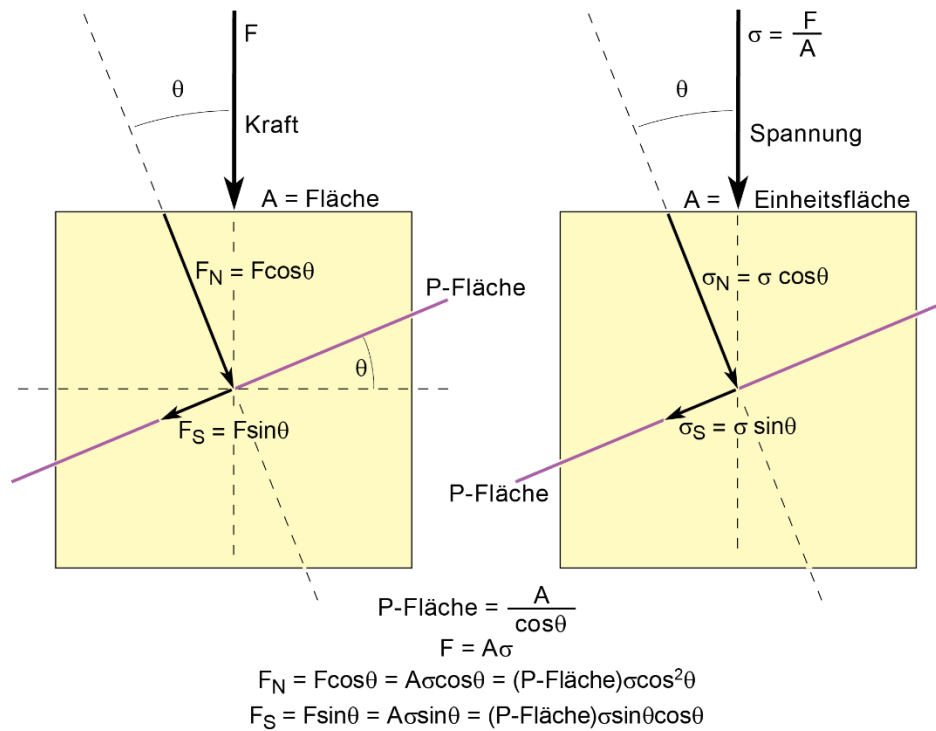
$$\sin \theta \cos \theta = \frac{(\sin 2\theta)}{2}$$

Der Würfel ist so beschaffen, dass $A_P = \text{Einheitsfläche} = 1$. Deshalb sind die Grössen der Normal- und Scherkomponenten der Spannung σ auf der P -Fläche:

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A_P} = \left(\frac{F}{A} \right) \cos^2 \theta = \sigma \cos^2 \theta$$

und

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A_P} = \left(\frac{F}{A} \right) \sin \theta \cos \theta = \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sin 2\theta \quad (5)$$



Ein Vergleich der **Gleichungen (2) und (5)** zeigt, dass die Spannungen nicht als Vektoren betrachtet werden können, als ob sie Kräfte wären.

Typischerweise liegt jedes Gestein unter einem triaxialen Spannungsfeld; die Hauptspannungen sind σ_1 , σ_2 und σ_3 mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Erinnerung: In der Geologie ist die Kompressionsspannung positiv und die Zugspannung negativ. In der Physik und im Ingenieurbereich ist die Zugspannung positiv und die Kompressionsspannung negativ.

Aus praktischen Gründen kann man eine beliebige Fläche P im Körper wählen, parallel zu σ_2 , die wiederum parallel zur horizontalen x-Achse der kartesischen Koordinaten ist. Der Winkel θ zwischen der Linie normal zu P und der vertikalen σ_1 (parallel zur z-Koordinatenachse) ist auch der Winkel zwischen der Fläche P und σ_3 . Man betrachtet das Problem im zweidimensionalen Spannungszustand. So vernachlässigt man σ_2 und berücksichtigt nur die zweidimensionale Hauptfläche (σ_1, σ_3). Diese Vereinfachung ist konsistent mit der Aussage, dass der Unterschied zwischen σ_1 und σ_3 die Verformung bestimmt, während σ_2 nur wenig Einfluss hat, und in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Linien in die (σ_1, σ_3)-Fläche repräsentieren Spuren von Flächen senkrecht zu dieser Fläche und parallel zu σ_2 .

Deshalb kann man aufgrund von **Gleichung (5)** schreiben, dass die Spannungskomponenten von σ_1 die folgenden sind:

$$\begin{aligned}\sigma_{1N} &= \sigma_1 \cos^2 \theta \\ \sigma_{1S} &= \sigma_1 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

σ_3 steht im rechten Winkel zu σ_1 . Die gleiche trigonometrische Beziehung löst σ_3 in ihre Komponenten auf:

$$\begin{aligned}\sigma_{3N} &= \sigma_3 \sin^2 \theta \\ \sigma_{3S} &= \sigma_3 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Sind σ_1 und σ_3 die Hauptspannungen, ergeben sich für die Normal- und Scherspannungskomponenten auf einer Fläche, deren Normale einen Winkel θ mit σ_1 bildet, folgende Beziehungen:

$$\sigma_N = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta$$

$$\sigma_S = \sin \theta \cos \theta (\sigma_1 - \sigma_3)$$

Aus der allgemeinen Trigonometrie weiss man auch, dass:

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

die man in die vorangehende Gleichung einsetzen kann, um die normale Spannungskomponente zu schreiben:

$$\sigma_N = \sigma_1 \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) + \sigma_3 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

und vereinfachen zu:

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\cos 2\theta (\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

Die Scherspannungskomponente ist dann:

$$\sigma_S = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_S = \frac{1}{2} \sin 2\theta (\sigma_1 - \sigma_3)$$

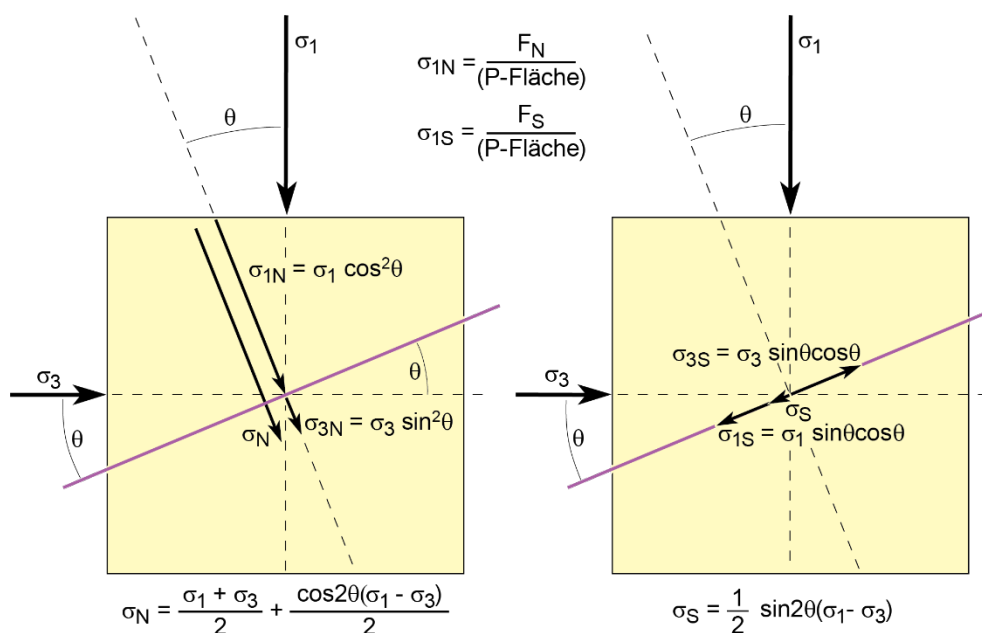
Wenn σ_1 und σ_3 die Hauptspannungen sind, lauten die Gleichungen für die normale Spannung und die Scherspannung durch eine Fläche, deren Normale mit dem Winkel θ zu σ_1 geneigt ist:

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta}{2}$$

$$\sigma_S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta}{2}$$

(6)

Beachte, dass von **Gleichung (6) zu Gleichung (5)** wird, wenn σ_3 null ist.



Diese Gleichungen demonstrieren, dass für Ebenen maximaler Scherspannung σ_{Smax} mit $2\theta = 90^\circ$ gilt. Das heisst, die Ebenen maximaler Scherspannung sind 45° zu den Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 geneigt.

In allen Fällen, in denen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gibt es nur zwei Flächen mit maximaler Scherspannung und diese schneiden sich in σ_2 . Auch für den dreidimensionalen Fall beobachtet man die für das Materialversagen wichtige maximale Scherspannung an jenen Ebenen, die mit σ_1 bzw. σ_3 einen Winkel von ungefähr 45° einschliessen und in der σ_2 -Achse zum Schnitt kommen. Bei Triaxialversuchen (die drei Hauptspannungen haben Magnituden ungleich Null) bilden Scherbrüche Winkel von weniger als 45° zur Hauptspannungsachse σ_1 . Wo paarweise Verwerfungsflächen entstehen, die mehr oder weniger gleichzeitig entstanden sind und die beiden begünstigten Scherflächensysteme repräsentieren, spricht man von **konjugierten Brüchen**. Konjugierte Verwerfungen kreuzen sich auf einer Linie, die parallel zur intermediären Hauptspannungsachse σ_2 verläuft. Die kompressiven Normalspannungen auf diesen Flächen tendieren dazu, Gleiten zu verhindern; Scherspannungen begünstigen Gleiten.

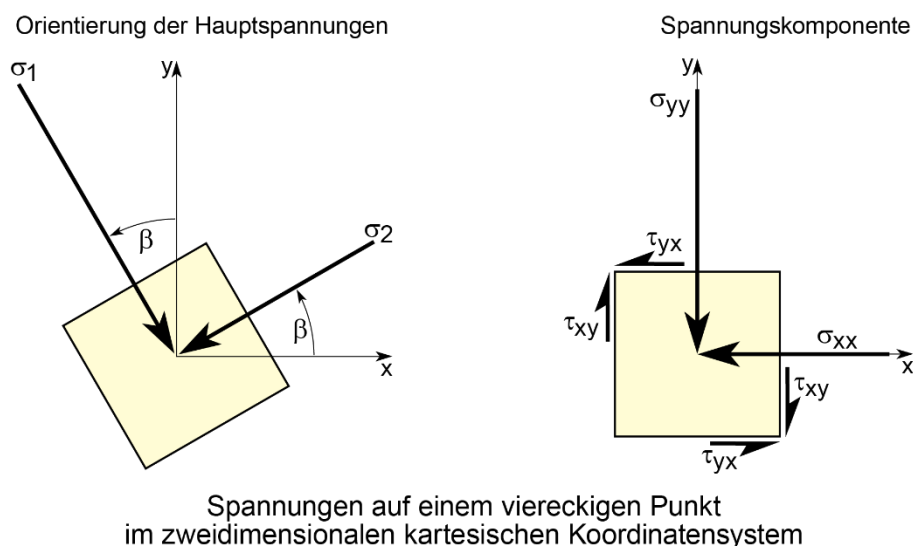
In der speziellen Situation, in der $\sigma_2 = \sigma_3$ oder $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt, gibt es eine unendliche Anzahl solcher Flächen, die 45° gegenüber σ_1 oder σ_3 geneigt sind.

In allen Fällen hat die maximale Scherspannung die Werte $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Durch **Gleichung (6)** kann man auch sehen, dass es für jeden Spannungszustand mit σ_1 und σ_3 , es gibt Oberflächen, auf denen keine Scherkräfte wirken. Diese Eigenschaft werden wir verwenden, um die Richtungen der Hauptspannungen zu definieren.

Beziehung zwischen Normalspannung und Scherspannung: Mohr'scher Kreis

Die Hauptspannungen sind diejenigen, die orthogonal zu drei gegenseitig orthogonalen Ebenen wirken. Die Scherspannungen auf diesen drei Ebenen gehen gegen Null. Zwischen diesen speziellen Orientierungen variieren die Normal- und Scherspannungen regelmässig in Bezug auf den Rotationswinkel θ . Wie sind die Normal- und Scherspannungskomponenten mit der Richtung verbunden?



Analytische Darstellung

Umstellen von σ_N in **Gleichungen (6)** und quadrieren beider Gleichungen ergibt:

$$\left[\sigma_N - \left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2 \cos^2 2\theta$$

(7)

$$\sigma_S^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2 \sin^2 2\theta$$

Beide **Gleichungen (7)** ergeben, wenn addiert:

$$\left[\sigma_N - \left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$$

und da für alle Winkel $\cos^2 + \sin^2 = 1$ erhält man:

$$\left[\sigma_N - \left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2$$

worin man die Struktur einer Standardgleichung für einen Kreis erkennt, gegeben in der Koordinatenebene (x,y) mit dem Mittelpunkt bei (h,k) und Radius r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Mit $x = \sigma_N$, $y = \sigma_S$ und $k = 0$.

Dies führt zu einer zweidimensional brauchbaren Darstellung der Spannungsgleichungen, bekannt als **Mohr-Diagramm**.

Der Radius des Spannungskreises ist

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

Der Mittelpunkt des Spannungskreises auf der σ Achse liegt bei

$$(\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

Zyklischer Austausch der Tiefzeichen erzeugt zwei andere Kreise für die anderen zwei Hauptdruckunterschiede, $(\sigma_2 - \sigma_3)$ und $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

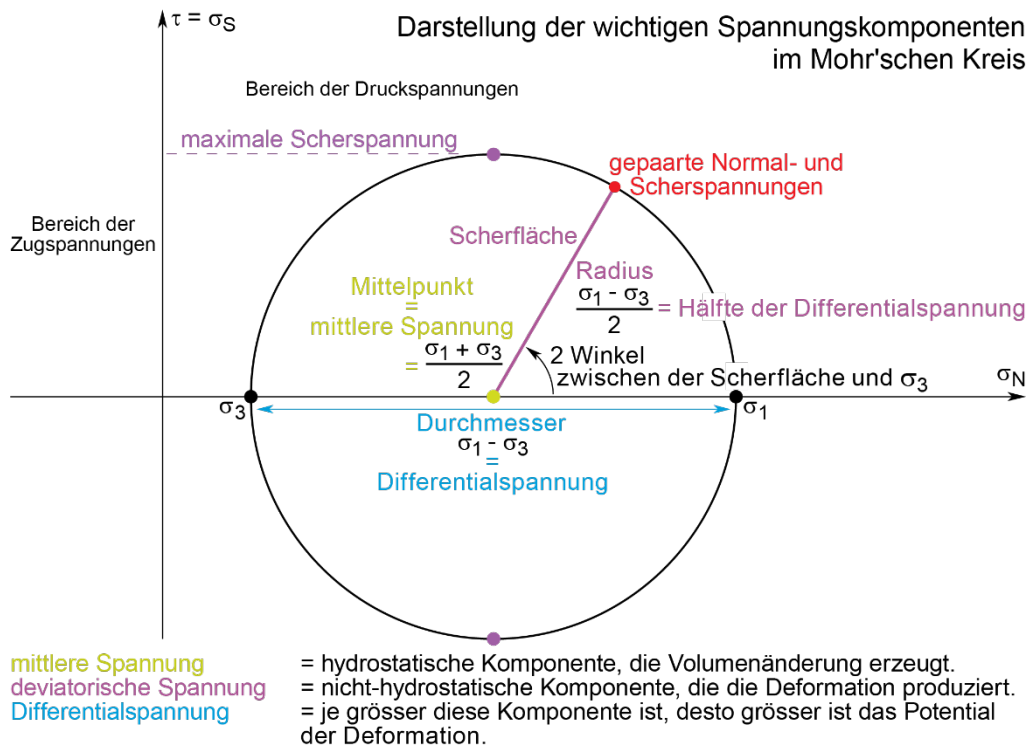
Graphische Darstellung

Die **Gleichungen (6)** beschreiben einen kreisförmigen Ort vom Paar σ_N und σ_S (Normal- bzw. Scherspannung), die auf Flächen beliebiger Orientierung innerhalb eines Körpers, mit bekannten Werten von σ_1 und σ_3 ausgesetzt ist, wirken. In anderen Worten, für einen gegebenen Spannungszustand σ_1 und σ_3 und eine gegebene Orientierung der betrachteten Ebene, werden die Normal- und Scherspannungen σ_N und σ_S durch einen Punkt auf dem Mohr'schen Kreis repräsentiert.

Spannung in zwei Dimensionen (ebene Spannung)

Für eine zweidimensionale Spannung können die Normal- und Scherspannung entlang zweier orthogonal, skalierten Koordinatenachsen geplottet werden, mit der Normalspannung σ_N entlang der Abszisse (horizontale x-Achse) und der Scherspannung σ_S entlang der Ordinate (vertikale y-Achse).

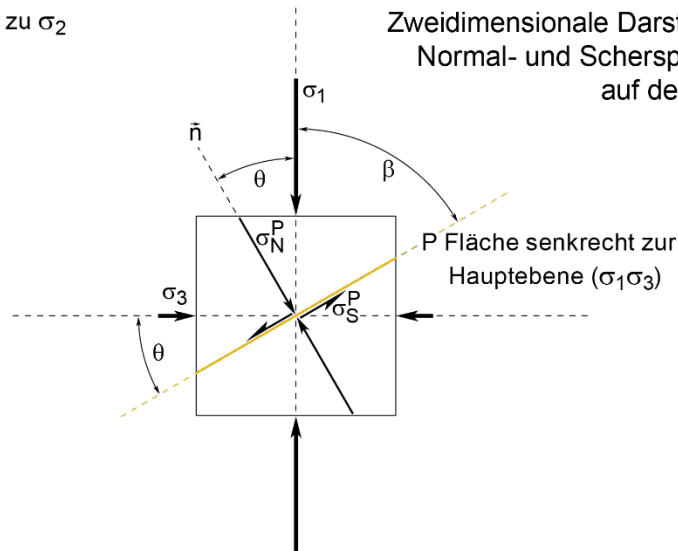
- Diese Achsen haben keine geografische Orientierung, aber beide haben eine positive und eine negative Richtung.
- Konventionsgemäss ist die rechte Seite des Diagramms positiv für kompressive Normalspannungen. Scherspannungen in der Richtung des Gegenuhreigers (konsistent mit dem trigonometrischen Sinn) werden als positiv betrachtet und über der Abszisse gezeichnet.



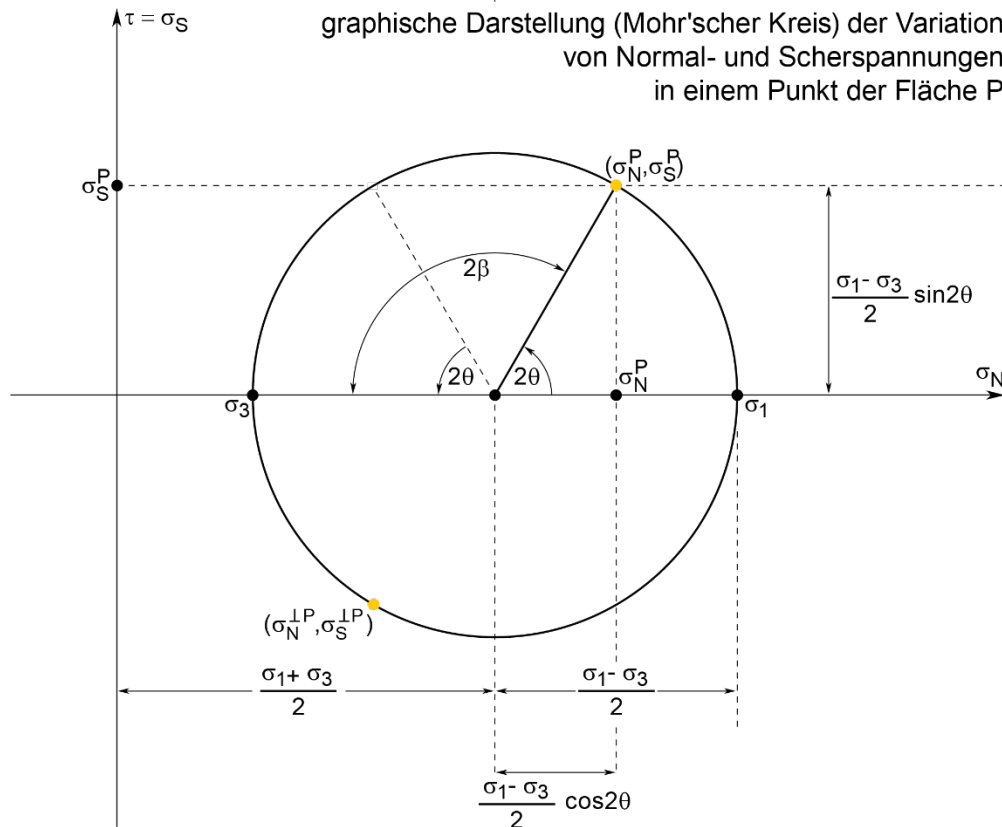
- 1) Die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 eines gegebenen Spannungszustands sind per Definition normale Spannungskomponenten; beide werden entlang der Abszisse mit einem Abstand vom Ursprung, der ihrem jeweiligen Wert entspricht, aufgetragen.
- 2) Ein Kreis mit Durchmesser $(\sigma_1 - \sigma_3)$ und Mittelpunkt $C = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ wird durch die Punkte σ_1 und σ_3 konstruiert. Die maximale Hauptspannung σ_1 befindet sich am rechten Ende des Kreises, die minimale Hauptspannung σ_3 am linken Ende des Kreises.

Ebene senkrecht zu σ_2

Zweidimensionale Darstellung der Normal- und Scherspannungen auf der Fläche P



graphische Darstellung (Mohr'scher Kreis) der Variation von Normal- und Scherspannungen in einem Punkt der Fläche P



Der Kreisumfang beschreibt den geometrischen Ort aller möglichen Wertepaare von σ_N und σ_S . Deshalb hat jeder Punkt P auf dem Kreis Koordinaten (σ_N, σ_S) wobei σ_N und σ_S durch die Gleichung (6) gegeben sind und 2θ der Winkel zwischen der σ_N Achse und der Linie PC ist, gemessen im Gegenuhrzeigersinn (trigonometrisch) vom rechten Ende der σ_N Achse. Demnach geben die Koordinaten eines Punktes P auf dem Kreis die Normalspannung σ_N (entlang der Abszisse) und die Scherspannung σ_S (entlang der Ordinate) auf einer Fläche, deren Normale (ACHTUNG: nicht die Fläche selbst) mit θ zu σ_1 geneigt ist. Aus einfachen geometrischen Gründen ist θ auch der Winkel zwischen der Bruchfläche und der geringsten Spannung σ_3 . Der 2β -Winkel, der im Uhrzeigersinn von σ_3 zum PC-Radius gemessen wird, ist zweimal so groß wie der Winkel zwischen σ_1 und der tatsächlichen Scherfläche.

Diese Konstruktion kann auch benutzt werden, um σ_1 , σ_3 und θ zu bestimmen, wenn σ_N und σ_S auf zwei orthogonalen Flächen gegeben sind. Da die Winkel in diesem grafischen Format verdoppelt werden, liegt der Punkt, der die Ebene orthogonal zu P darstellt, diametral entgegengesetzt zum P-Punkt. Der Mohr'sche Kreis kann mit Hilfe dieser zwei Punkte, verbunden durch einen Durchmesser, der die horizontale Achse in der Mitte C schneidet, konstruiert werden.

Das Mohr'sche Spannungskreis ermöglicht, Normal- und Scherspannungsgrößen verschieden orientierter Flächen zusammen zu plotten. Es zeigt auch, dass:

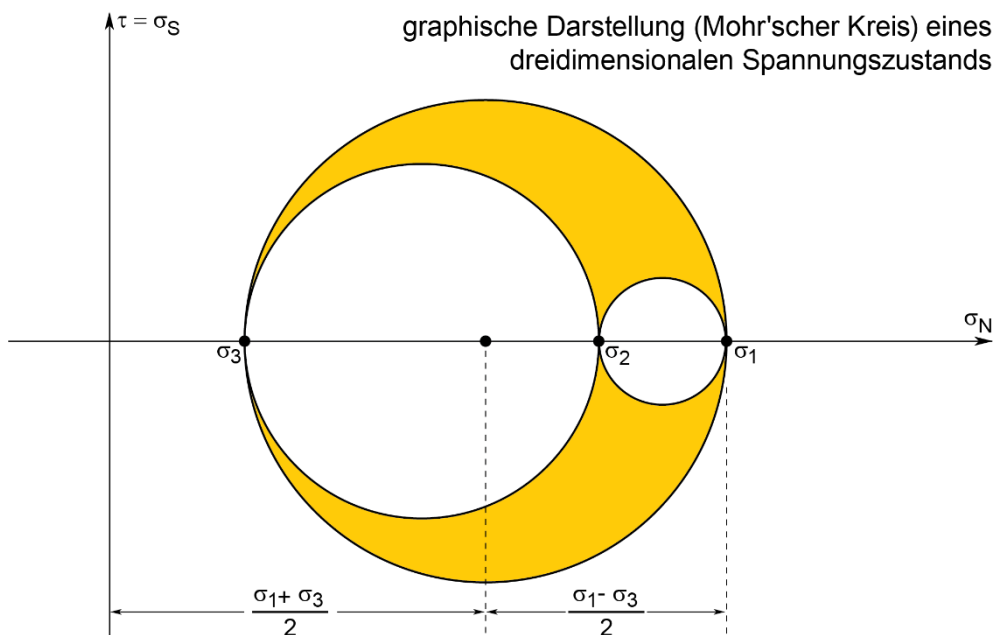
- die Punkte auf dem Kreis (d.h. die Neigung der Flächen) entlang welchen für einen gegebenen Spannungszustand die Scherspannung σ_S am grössten ist, Werten mit $\theta = \pm 45^\circ$ entsprechen.
- die maximale Spannungsdifferenz ($\sigma_1 - \sigma_3$) bestimmt den Wert der grössten Scherspannung, σ_S weil die Differentialspannung, die dem Durchmesser des Mohrkreises entspricht, zweimal so gross ist wie die maximale Scherspannung (dem vertikalen Radius des Kreises). Der Radius bleibt gleich gross, ungeachtet der Koordinatenorientierung. Er ist die **zweite Invariante** (*second invariant*) des zweidimensionalen Spannungstensors.

Übung

Zeichnen Sie ein Mohr-Diagramm der folgenden Spannungszustände: hydrostatisch, einachsig, dreiachsig.

Spannung in drei Dimensionen

Die Mohr'sche Konstruktion wird auch bei dreidimensionalen Spannungszuständen angewandt. In diesem Fall hat das Diagramm drei Kreise, zwei kleine Kreise (σ_1, σ_2) und (σ_2, σ_3) sind tangent an σ_2 , innerhalb des dritten, grösseren (σ_1, σ_3) Kreis dessen linkes Ende σ_3 ist. Die drei Diagonalkomponenten σ_1 , σ_2 und σ_3 des Spannungstensors sind die Normalspannungen, die entlang der horizontalen Achse geplottet werden; nichtdiagonale Komponenten sind die Scherspannungen, die entlang der vertikalen Achse geplottet werden. Alle möglichen (σ_N, σ_S)-Punkte fallen auf den grossen (σ_1, σ_3) Mohrkreis oder zwischen diesen und den (σ_1, σ_2)- und (σ_2, σ_3)-Mohrkreisen. Der Diagrammbereich zwischen diesen drei Kreisen ist der Ort der Spannungen auf Flächen aller Orientierungen in drei Dimensionen.



Mohr-Diagramme werden ausgiebig für Diskussionen über das Zerknacken von Gesteinen benutzt, weil sie die Variationen der Spannung mit der Richtung graphisch darstellen und ermöglichen, die Spannung an bekannten schwachen Flächen zu finden.

Wirkung des Porenflüssigkeitsdrucks

Der **Flüssigkeitsdruck** (*fluid pressure*) ist der Druck, der durch Flüssigkeiten, die in den Brüchen und Poren des Gesteins vorhanden sind, ausgeübt wird oder in diesen herrscht.

Flüssigkeitsdruck

Gesteine in Krustentiefen von mehreren Kilometern haben gewöhnlich entweder eine intergranulare oder eine Bruchporosität, aufgrund derer eine Flüssigkeitssäule bis zur Oberfläche reichen kann. Wenn das Fluidreservoir im statischen Gleichgewicht ist, wird der Flüssigkeitsdruck P_f angenähert mit:

$$P_f = \rho_{(f)} g z$$

wobei $\rho_{(f)}$ die Flüssigkeitsdichte, g die Gravitationsbeschleunigung und z die Tiefe sind. Dies ist der **hydrostatische Druck** (*hydrostatic pressure*), der sich vom lithostatischen Druck unterscheidet (dem Gewicht der Gesteine in derselben Tiefe).

Übung

Berechnen Sie die Steigung des hydrostatischen Drucks für eine Säule aus reinem Wasser sowie die des lithostatischen Drucks.

In der Praxis sind die gemessenen Flüssigkeitsdrücke gelegentlich geringer, aber sehr oft grösser als der Betrag des normalen hydrostatischen Drucks. Flüssigkeiten mit Überdruck werden einem oder mehreren Mechanismen zugeschrieben, etwa der Kompaktion von Sedimenten, der diagenetischen bzw. metamorphen Dehydratisierung von Mineralien oder der artesischen Zirkulation. Tektonische Spannungen in aktiven Gebieten können auch den interstitiellen Wasserdruck (zwischen Kristallen) erhöhen. Kohlendioxid, abgegeben vom Mantel oder anderen Quellen, ist eine Flüssigkeit mit üblicherweise anormalem Druck.

Effektive Spannung

Das **gesamte Spannungsfeld** (*total stress field*) in einem porösen Gestein lässt sich durch die Normal- und Scherkomponenten einer Fläche beschreiben. Das Gestein und die dazwischenliegende Flüssigkeit bilden zusammen die gesamten Normalspannungs- und Scherspannungskomponenten. Der Tensor der Gesamtspannungen (**Gleichung 1**) drückt das gesamte Spannungsfeld aus:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

in dem die Spannungen aufgrund der Flüssigkeit ebenfalls neun Komponenten haben:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

wobei:

$$\begin{aligned} p_{ii} &= p_{jj} = p \\ p_{ij} &= p_{ji} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

da die normalen (hydrostatischen) Drücke in allen Richtungen gleich sind und Scherspannungen der Flüssigkeiten vernachlässigt werden, da sie viel kleiner als die im Feststoff sind. Daraus ergibt sich eine quadratische, isotrope Matrix, die nur Werte, die entlang der Diagonalen ungleich null sind, enthält:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

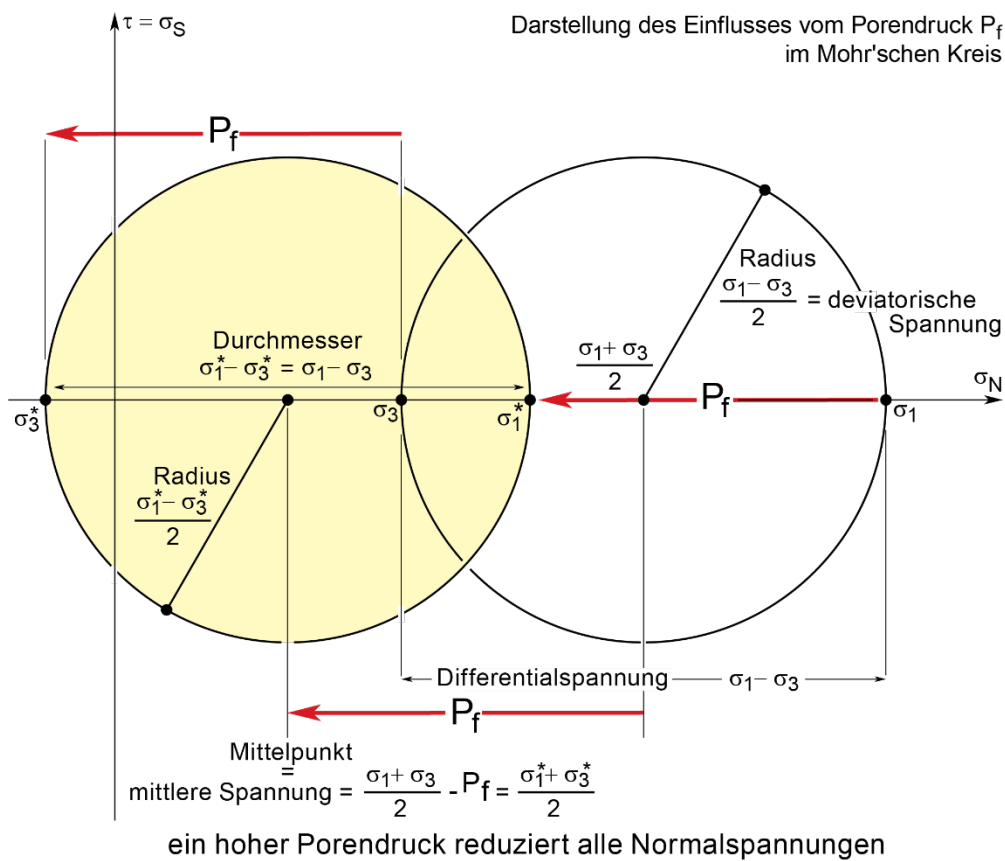
Die **effektive Spannung** (*effective stress*) ist der Unterschied zwischen der Gesamtspannung und dem Flüssigkeitsdruck $P_f = p$:

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{tot}} - P_f$$

Die effektiven Hauptspannungen σ_1^{eff} , σ_2^{eff} und σ_3^{eff} betreffen nur den festen Teil des porösen Mediums.

Änderung des Umgebungsdrucks

Enthält ein Material Flüssigkeit unter einem Druck P_f , wirkt dieser Druck gleichmässig in alle Hauptspannungsrichtungen einer angewandten Last entgegen. Deswegen werden die Werte aller Normalspannungen auf irgendeiner Fläche um den Wert des Porendrucks P_f reduziert. Die Werte aller Scherspannungen bleiben gleich, was darauf hindeutet, dass sie von den hydrostatischen Komponenten unabhängig sind. In Gesteinen entspricht dies der Verringerung bzw. Verkleinerung des Umgebungsdrucks.



Die **effektive Mittelspannung** (*effective mean stress*) ist die Differenz zwischen der Mittelspannung und dem Flüssigkeitsdruck:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma_1^{\text{eff}} + \sigma_2^{\text{eff}} + \sigma_3^{\text{eff}}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} - P_f = \bar{\sigma} - p$$

Bezogen auf den Mohr'schen Kreis, versetzt ein Wechsel der gesamten Normalspannung ($\sigma_1 + \sigma_3$) den Kreis entlang der Abszisse um den Wert P_f , ohne dabei seinen Durchmesser zu verändern, d.h. der Kreis wandert nach links, in Richtung der kleineren Werte der Normalspannung und behält seine Grösse bei. Bei einer Abnahme des Porendrucks würde sich der Kreis nach rechts bewegen.

Spannungsellipsoid

Das Spannungsellipsoid ist eine graphische Methode, die sechs Parameter des Spannungstensors darzustellen:

- die drei Intensitäten der Hauptspannungen;
- die drei zueinander senkrechten Richtungen der Hauptspannungen.

Die grösste und kleinste Hauptspannung ist das Maximum und Minimum aller Oberflächenspannungen, die auf Flächen beliebiger Orientierung durch einen Punkt wirken.

Numerischer Ansatz in zwei Dimensionen

Das Spannungssystem wird zunächst auf eine Deformation in einer zweidimensionalen Fläche beschränkt.

Übung

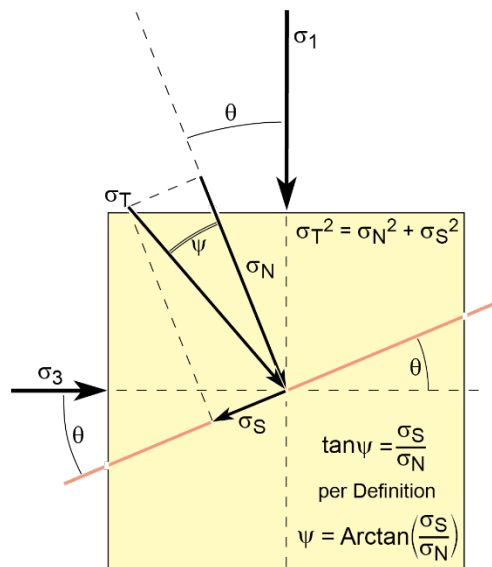
* Nehmen Sie einen Punkt O auf einer horizontalen Fläche P .

Eine vertikale Spannung von 100 MPa und eine horizontale Spannung von 50 MPa wirken in O .

* Bestimmen Sie mit einem Taschenrechner und der unteren Skizze die Absolutwerte der Spannungen auf Flächen, die mit 5° Schritten gegenüber O geneigt sind.

* Machen Sie getrennte Berechnungen für die Normal-, Scher- und Gesamtspannungen.

* Beschreiben Sie die Variation der Spannungsgrößen als Funktion der Orientierung.



(spherical coordinates = Koordinaten, die Positionen auf einer Kugel beschreiben) von $\mathbf{n}$ ausgedrückt:

$$\begin{cases} n_x = \sin \theta \cdot \cos \phi \\ n_y = \sin \theta \cdot \sin \phi \\ n_z = \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

Die Polarrichtungen sind gleich den Kosinusrichtungen $\{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \theta\}$ direkt aus den Winkeln zwischen der Flächennormalen und den Koordinatenachsen ableitbar. Da $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist, müssen diese Komponenten die Bedingung der Einheitslänge erfüllen:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (9)$$

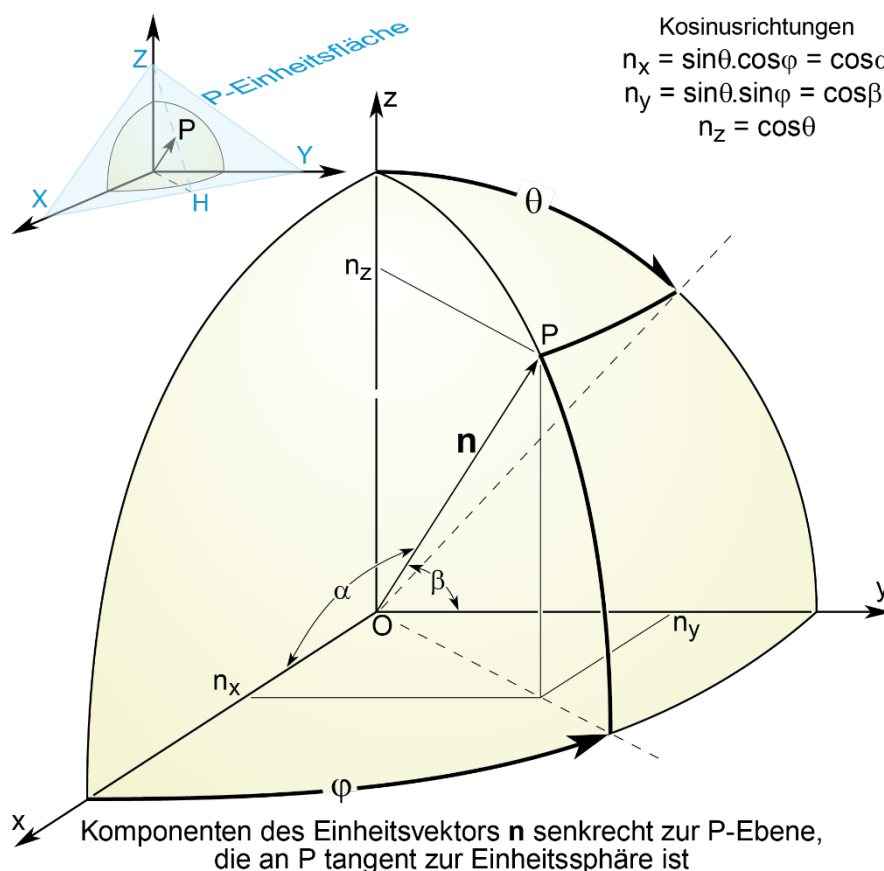
Jetzt betrachtet man einen unendlich kleinen Tetraeder, der durch die Fläche P und durch jene drei anderen dreieckigen Flächen begrenzt ist, die die Koordinatenachsen enthalten. Die Fläche schneidet die Achsen Ox, Oy und Oz an den Punkten X, Y und Z. Das Dreieck XOY ist die Projektion der Deckfläche XYZ parallel zu Oz auf die xOy-Ebene. Die Grösse der XYZ-Flächenelemente ist:

$$(1/2) \cdot (\text{Basis XY} \cdot \text{Höhe ZH})$$

Die Grösse des XOY-Flächenelementes ist:

$$(1/2) \cdot (\text{Basis XY} \cdot \text{Höhe OH})$$

Das Verhältnis zwischen den beiden Flächen ist dem Verhältnis OH/ZH gleich, wobei OH und ZH die beiden Seiten des gleichen Dreiecks sind, das in O einen rechten Winkel hat. Ein geometrischer Aufbau innerhalb der Fläche ZOH zeigt, dass $\text{OH}/\text{ZH} = \cos \theta = n_z$. Eine ähnliche Argumentation zeigt, dass für die Projektion von XYZ auf die beiden anderen Koordinatenflächen, die Proportionalitätsfaktoren α (Projektion parallel zu Ox) und β (Projektion parallel zu Oy) resultieren.



Jetzt betrachten wir das nötige Kräftegleichgewicht im Tetraeder, das von der Fläche P und den drei anderen dreieckigen Flächen, die die Koordinatenachsen enthalten, umschlossen wird. Kräfte, die auf eine der Flächen des Tetraeders wirken, werden in eine Normalkraft und zwei Scherkräfte zerlegt.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yy} & \Phi_{yx} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zz} & \Phi_{zx} & \Phi_{zy} \end{array}$$

Wir nehmen XYZ als Einheitsfläche auf der die angewandte Kraft $F/1$ gleich einem Druckvektor $\mathbf{T}$ ist. Dessen Komponenten T_x , T_y und T_z sind zu den Koordinatenachsen parallel. $\mathbf{T}$ wird dann durch die einfache vektorielle Summe bestimmt, wobei die Kosinus-Richtungen die Vektorkomponenten gewichten:

$$\mathbf{T} = T_x \cos \alpha + T_y \cos \beta + T_z \cos \theta \quad (10)$$

Diese drei Komponenten werden durch die Kraftbestandteile ausgeglichen, die in derselben Richtung auf die drei anderen Flächen einwirken. Zum Beispiel:

$$(\text{area}=1)T_x = \Phi_{xx} + \Phi_{yx} + \Phi_{zx} \quad (11)$$

Die Flächen der Koordinatenebenen, die in Bezug auf die XYZ-Einheitsfläche oben errechnet wurden, sind $\cos \alpha$, $\cos \beta$ und $\cos \theta$. Per Definition sind Kraftkomponenten Φ_{ij} gleich den Spannungskomponenten σ_{ij} und Scherkomponenten τ_{ij} multipliziert mit der Fläche, auf die sie wirken. Deshalb kann man alle Kraftkomponenten schreiben als:

$$\begin{array}{lll} \Phi_{xx} = n_x \sigma_{xx} & \Phi_{xy} = n_x \tau_{xy} & \Phi_{xz} = n_x \tau_{xz} \\ \Phi_{yy} = n_y \sigma_{yy} & \Phi_{yx} = n_y \tau_{yx} & \Phi_{yz} = n_y \tau_{yz} \\ \Phi_{zz} = n_z \sigma_{zz} & \Phi_{zx} = n_z \tau_{zx} & \Phi_{zy} = n_z \tau_{zy} \end{array}$$

Das Beispiel-Gleichung (10) wird:

$$T_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} \quad (12)$$

Die Abwesenheit von Rotation impliziert, dass $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, und Gleichung (11) wird:

$$T_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \quad (13)$$

Mit ähnlichen Gleichgewichtsargumenten entlang der anderen Richtungen, sind die Koordinatenachsen des Spannungsvektors $\mathbf{T}$ in Bezug auf $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} T_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ T_y = \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ T_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{cases}$$

Diese 3 linearen Gleichungen werden in Matrixdarstellung geschrieben:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

Die 3x3-Spannungsmatrix, die jeden Spaltenvektor $\mathbf{n}$ linear in einen anderen Spaltenvektor $\mathbf{T}$ umwandelt, ist ein **Spannungstensor** (*stress tensor*) zweiter Stufe. Er verbindet jede mögliche gegebene Fläche mit ihrem dazugehörigen Spannungsvektor, und wird in einer verkürzten Art als Cauchy Formel geschrieben:

$$T_i = \sigma_{ij}n_j$$

Die Magie dieser Formel: Multipliziert man den als einfache Matrix behandelten Spannungstensor mit einem Einheitsvektor n_j , der normal zu einer bestimmten Ebene ist, erhält man die Zugkraft, die auf diese Ebene wirkt.

Erinnern Sie sich: Wenn **A** und **B** zwei rechteckige Reihen von Variablen sind, wird ihr Produkt **C** definiert als:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Wobei das Element c_{ij} von **C** errechnet wird durch Multiplikation der i^{ten} Reihen von **A** mit der j^{ten} Spalte von **B** und die einzelnen Elemente summiert:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

AB ist definiert, nur wenn die Breite (Spaltenzahl) von A gleich der Höhe (Reihenzahl) von B ist und **AB** ≠ **BA** ist. Ausserdem bedeutet **AB=0** nicht, dass entweder **A** oder **B** eine null Matrix ist.

Diese geometrische Parallelogrammkonstruktion und **Gleichung (13)** zeigen, dass die Normalspannung σ entlang der Fläche mit der Normalen **n** gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \vec{T} \cdot \vec{n} &= T_x n_x + T_y n_y + T_z n_z \\ \sigma &= n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + n_z^2 \sigma_z + 2(n_y n_z \tau_{yz} + n_x n_z \tau_{zx} + n_x n_y \tau_{xy}) \end{aligned} \quad (15)$$

während die zugehörige Scherspannung:

$$\tau^2 = \|\vec{T}\|^2 - \sigma^2$$

beträgt.

Wir sind daran interessiert, die geometrische Darstellung der Spannungsänderung in Richtung zu finden. Die Theorie lässt sich am besten für ein zweidimensionales Spannungssystem darstellen, wobei der Winkel $xOP = \theta$ ist. Dann gilt $n_x = \cos \theta$, $n_y = \sin \theta$ und $n_z = 0$. **Gleichung (9)** wird zu:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

In der vertikalen Fläche xOP , mit σ parallel zur horizontalen Achse Ox , sind die einzigen Kräfte, die auf den Tetraeder (Prisma in 2D) in Richtung Ox wirken $\sigma_x \cdot (\text{Fläche von } P)$ und $\sigma_1 \cdot (\text{Fläche von } xOz)$. Diese Kräfte müssen im Tetraeder im Gleichgewicht sein, so dass:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot (\text{area of } xOz / \text{area of } P)$$

Nachdem nun

$$\text{Fläche von } xOz = n_x \cdot (\text{Fläche von } P),$$

(Flächen sind in 2D auf Linien projiziert) erhält man:

$$\sigma_x = n_x \sigma_1$$

und mit ähnlichen Argumenten

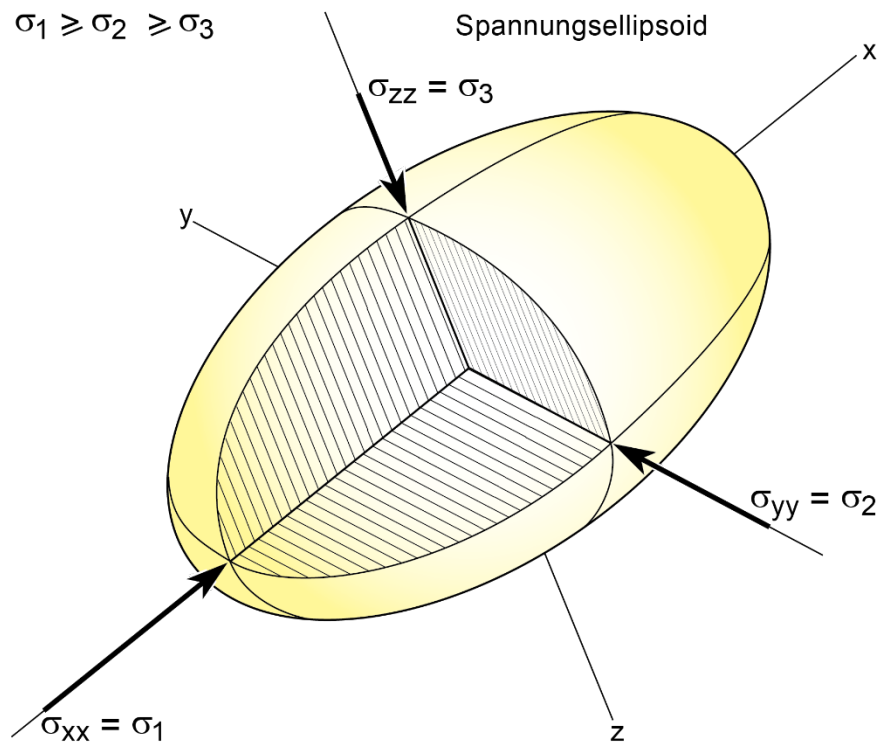
$$\sigma_y = n_y \sigma_2$$

$$\sigma_z = n_z \sigma_3$$

Substituieren der Kosinusrichtungen aus **Gleichung (9)** ergibt:

$$(\sigma_x^2 / \sigma_1^2) + (\sigma_y^2 / \sigma_2^2) + (\sigma_z^2 / \sigma_3^2) = 1 \quad (16)$$

Gleichung (16) ist die Gleichung eines im Ursprung zentrierten Ellipsoids, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind. Dieses **Spannungsellipsoid** (*stress ellipsoid*) ist eine grafische Darstellung der Spannung.



Die Hauptachsen dieses Ellipsoids sind die **Hauptachsen der Spannung** (*principal axes of stress*), die senkrechten Richtungen zu Flächen ohne Scherspannung. Die Richtung und Grösse eines Radiusvektors des Spannungsellipsoids gibt eine komplette Darstellung der Spannung auf einer Fläche, die mit diesem Radiusvektor verbunden ist. Der Radiusvektor ist:

$$s = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

Beachte, dass i.A. die Fläche, die zu einem gegebenen Radiusvektor gehört, nicht normal zu diesem Radiusvektor ist.

Wegen der Symmetrie des Ellipsoids gibt es immer drei senkrechte Richtungen (die Hauptachsen) in denen $\vec{T}$ und $\vec{n}$ dieselbe Richtung haben. Nun ist die Normalspannung (Gleichung 15) auf einer Fläche, deren Normale den Richtungskosini $\{n_x; n_y; n_z\}$ hat, gegeben durch:

$$\sigma = n_x^2 \sigma_1 + n_y^2 \sigma_2 + n_z^2 \sigma_3$$

Die Grösse der Scherspannung auf dieser Fläche ist:

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_x^2 n_y^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_y^2 n_z^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_z^2 n_x^2$$

Wenn diese Richtungen als Koordinatenachsen genommen werden, sind alle Scherkomponenten gleich null. Der Spannungstensor (aus Gleichung 13) vereinfacht sich zu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Spannungsellipsoid – Spannungstensor

Die numerisch erzeugte Ellipse stellt einen Abschnitt des **Spannungstensors** (*stress tensor*) in einer speziellen Hauptfläche dar. Der Spannungstensor ist kein einzelner Vektor. Er bezieht die gesamte Spannungseinwirkung ein, die an jeder Fläche mit jeder denkbaren Orientierung wirkt und einen bestimmten Punkt in einem Körper, nämlich das Zentrum des Ellipsoids, zu einer bestimmten Zeit durchläuft.

Um den Spannungstensor zu beschreiben, braucht man die Orientierung, die Grösse und die Form des Spannungsellipsoids. Das wird gewöhnlich so gemacht, dass man die Orientierung und die Länge der drei Hauptachsen des Spannungsellipsoids bestimmt. Wenn man den Spannungstensor in jedem Punkt eines Körpers definieren kann, kann man das gesamte Spannungsfeld beschreiben, das die gesamte Sammlung der Spannungstensoren ist. Diese Übung ist ein grundlegender Ansatz zur Bestimmung der Beziehung zwischen Spannung und Verformung.

Spannungsfeld

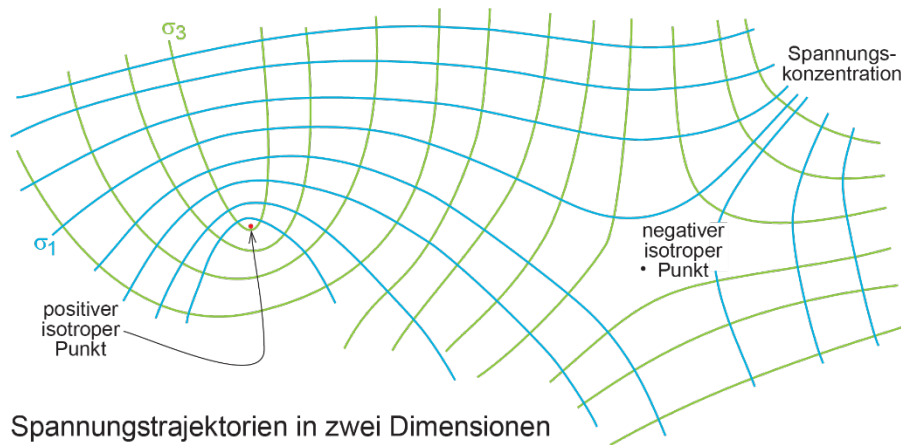
Wenn Oberflächenkräfte auf einem beliebigen Körper wirken, variieren die resultierenden Spannungen innerhalb des Körpers im Allgemeinen in Richtung und Intensität von Punkt zu Punkt. Die Verteilung aller Spannungen in allen Punkten wird als **Spannungsfeld** (*stress field*) beschrieben. Das Spannungsfeld kann entweder als Satz von Spannungsellipsoiden, als Spannungsachsen oder als Spannungstrajektorien beschrieben werden. Wenn Normal- und Scherkomponenten in allen Punkten gleich sind, d.h. gleiche Magnitude und Orientierung haben, ist das Spannungsfeld **homogen**. Ansonsten ist es **inhomogen** was in der Geologie häufig der Fall ist. Die relative Gleichförmigkeit der Spannungsorientierungen und der relativen Spannungsgrössen fällt auf und ermöglicht es, eine Karte der regionalen Spannungsfelder zu zeichnen.

Schauen Sie sich dazu die **World Stress Map** an: <https://www.world-stress-map.org/>

Zwei oder mehr Spannungsfelder verschiedener Ursprünge können sich überlagern. Dies ergibt ein **kombiniertes Spannungsfeld** (*combined stress field*). Die Ursprünge der Spannungen sind vielfältig und infolgedessen verteilt sich die Spannung ungleich innerhalb der Erdlithosphäre. Die grössten Magnituden werden innerhalb oder nahe an den Regionen erreicht, in denen die verursachenden Kräfte auftreten. Die Spannung vermindert sich graduell infolge der Elastizität und der Kriechenergie, die bei der Verformung verbraucht werden. Der **Spannungsgradient** (*stress gradient*) ist die Rate, mit der sich die Spannung in eine bestimmte Richtung erhöht, zum Beispiel mit zunehmender Tiefe, bei einem normalen hydrostatischen Gradienten von 10 MPa/km und einem lithostatischen Überlastgradienten von 23 MPa/km. Kurven gleicher Druckgrössen (Spannungskonturen) illustrieren solche Gradienten. In der Lithosphäre entstehen Spannungen durch Kräfte, die von Punkt zu Punkt übertragen werden. Das Kennen der Grösse und der Orientierung der Hauptspannungen an irgendeinem Punkt ermöglichen die Berechnung der Normal- und Scherkomponenten auf jeder möglichen Fläche, die durch diesen Punkt geht.

Spannungstrajektorien

In zwei Dimensionen, d.h. auf einer gegebenen Oberfläche (z.B. in einem Kartenbild) sind die **Spannungstrajektorien** (*stress trajectories*) virtuelle Linien mit der Eigenschaft, dass die Richtungen der Hauptachsen Tangenten zu diesen Linien in allen Punkten sind und die gleichen Spannungsachsen an diesen Punkten verbinden. Z.B. bestimmt eine Gruppe von Linien die Richtung der maximalen Hauptspannungen und die zweite, die der minimalen Hauptspannungen. Die beiden Gruppen sind überall rechtwinklig zueinander. Die einzelnen Trajektorien der Hauptspannungen können gebogen sein, müssen sich jedoch in irgendeinem Punkt immer rechtwinklig schneiden. Deshalb porträtieren die Spannungstrajektorien die Spannungsvariationen innerhalb eines Körpers. Benachbarte, sich annähernde Trajektorien weisen eine Spannungskonzentration auf. Punkte, an denen die Hauptspannungen gleich sind, sind **isotrope Punkte** (*isotropic points*). Verflochtene Trajektorien verbinden positive isotrope Punkte; trennende Trajektorien definieren negative isotrope Punkte. Punkte, an denen die Hauptspannungen alle null sind, sind **einzigartige Punkte** (*singular points*).



Gleitlinien

Kennen wir die Trajektorien der Hauptspannung, sind die möglichen Scherflächen in jedem Punkt des Spannungsfeldes die Oberflächentangenten in Richtung der maximalen Scherspannung an diesem Punkt. Spuren möglicher Scherflächen sind **Gleitlinien** (*slip lines*). In zwei Dimensionen stellen zwei Sätze von Linien Kurven mit rechts- und linkssinnigen Scherrichtungen dar. Sie laufen in Richtung zu den isotropen Punkten zusammen.

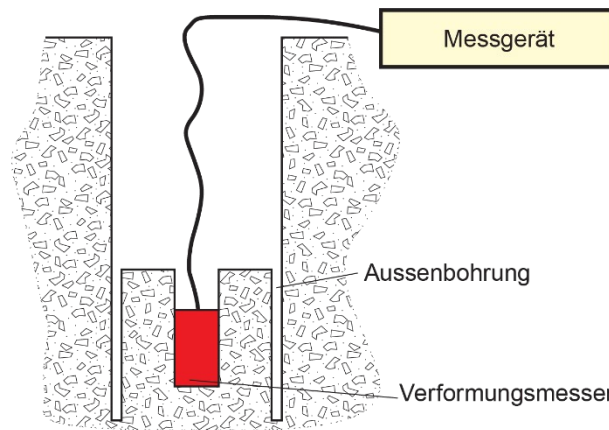
Messen von Spannungen

Die Beweggründe, Spannungen zu messen, kamen aus der Ingenieurgeologie, der Exploration und aufgrund geologischer Gefahren. Wenn Minen oder Bohrlöcher gegraben oder ausgehoben werden, werden die Spannungen, die zuvor durch die jetzt entfernten Gesteine gestützt wurden, sofort auf die umgebenden Gesteine übertragen. Die resultierende Spannungskonzentration lässt sich gut mit der elastischen Theorie erklären. Die Entlastung der Spannung führt zur Verformung, vorausgesetzt, dass die elastischen Konstanten der intakten Gesteine bekannt sind. Spannungsmessungen werden indirekt durch das Messen des Gesteinsverhaltens unter Spannungseinfluss um Minen oder Bohrlöcher vorgenommen.

Die zwei Hauptmethoden um in-situ Spannungen rund um Spannungskonzentrationen in oberflächennahen Bohrlöchern zu messen, sind **Überkernung** (*overcoring*) und **Hydraulische Bruchbildung** (*hydrofracturing*).

Elastische Verformung: Überkernung und Ausbruch

Beim Überkernen wird eine kleine ringförmige Bohrung gebohrt in der ein Feindeformationsmesser (Dehnungsmessstreifen) auf der Unterseite installiert wird. Nachfolgend wird eine tiefere, koaxiale und ringförmige Bohrung, um und mit einem internen Radius kleiner als die erste Bohrung, gebohrt. Dieses Verfahren befreit den Gesteinszylinder des Messgeräts von regionalen Spannungen. Die nachfolgende elastische Verformung des inneren kreisförmigen Gesteinszylinders zu einem elliptischen Zylinder definiert die Richtung der horizontalen Spannungen, wobei die lange Achse der Ellipse parallel zur maximalen horizontalen Hauptspannung ist (grössere Entspannung entlang der maximalen Kompressionsrichtung). Diese Verformung lässt sich in eine Spannungsgrösse umwandeln, wenn die elastischen Eigenschaften des Gesteins bekannt sind.



Grundregel der Spannungsmessung durch die Überkernung

Nach der Bohrung kann eine kreisförmige Bohrung aufgrund von Belastungen in den umliegenden Gesteinen elliptisch (ausbruchförmig) werden. Die Längsachse der Ellipse liegt parallel zur minimalen horizontalen Spannung.

Hydraulische Rissbildung

Bei der **hydraulischen Rissbildung** (*hydraulic fracturing*) wird eine unter Druck gesetzte Flüssigkeit in einen kurzen, abgedichteten Abschnitt einer Bohrung gepumpt. Der **Injektionsdruck bei Rissbildung** (*breakdown pressure*) ist der Flüssigkeitsdruck, der erforderlich ist, um eine Extensionsbruchbildung an der Bohrlochwand zu verursachen. Bruchbildung tritt auf, wenn dieser Druck gleich der Dehnfestigkeit σ_T des Gesteins ist, die der minimalen horizontalen effektiven Hauptspannung $\sigma_{h,eff}^*$ entspricht:

$$\sigma_{h,eff}^* = -\sigma_T$$

Das Konzept setzt voraus, dass die Hauptspannung vertikal ausgerichtet ist (nahe der Oberfläche) und mit dem vertikalen Bohrloch übereinstimmt. Die Grösse der vertikalen Spannung σ_v ist offenbar das Gewicht der darüberliegenden Gesteine. Das Ziel ist, die Grössen der grösseren (σ_H) und kleineren (σ_h) Hauptspannungen sowie deren Orientierung in der Horizontalebene zu finden. Die hydraulische Rissbildung nimmt an, dass sich die Risse senkrecht zur minimalen horizontalen Hauptspannung bilden. Folglich liefert die Messung der Orientierung der geschaffenen hydraulischen Risse und des Injektionsdrucks bei der Rissbildung einen Hinweis auf den Spannungstensor.

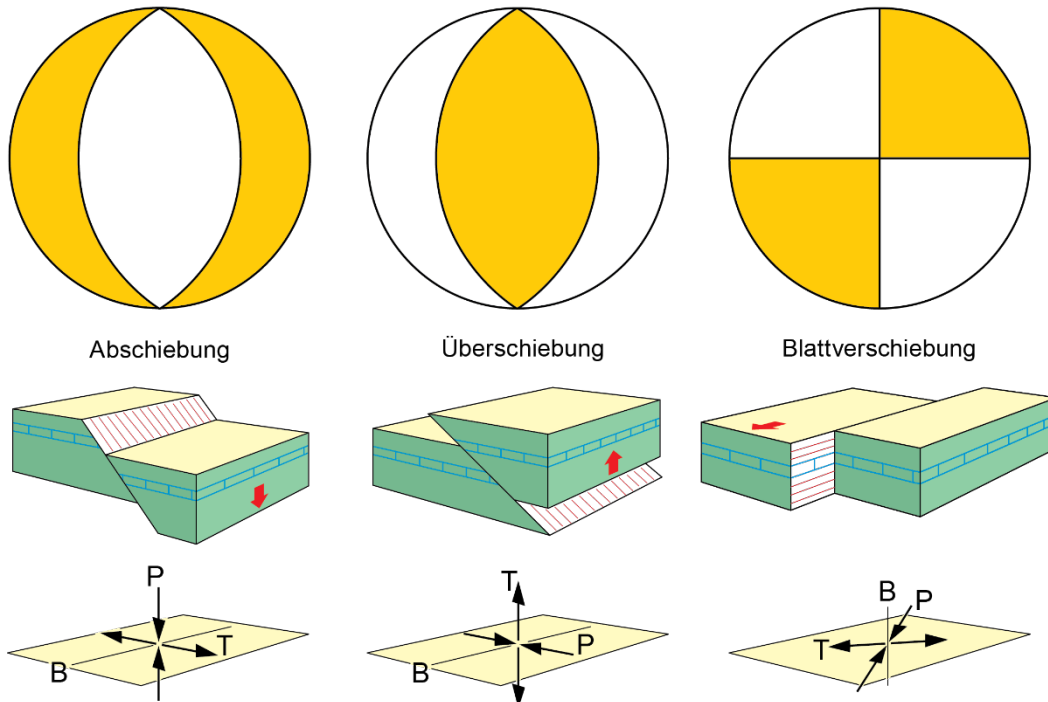
Jedoch lässt sich mit dieser Technik die Richtung der Hauptspannungsachsen nicht berechnen. Tatsächlich hängt der Beginn der hydraulischen Rissbildung auch von den Druckregimen und der Orientierung des Bohrlochs ab.

Sobald die Einspritzung aufgehört hat, wird der Riss zu einem Durchgang vom gebohrten Reservoir zum Bohrloch für Kohlenwasserstoffgas oder Wasser und ermöglicht so eine erhöhte Produktion. Die hydraulische Rissbildung ist eine praktische Technik zur Kohlenwasserstoffförderung aus Reservoirs mit niedriger Permeabilität.

Erdbebenlösungen

Die Achsen P (für die Komprimierung, bewegt sich der Boden in Richtung der seismischen Station), B und T (Dilatation, Bewegung weg von der seismischen Station) der im Erdbeben freigegebenen elastischen Verformung, sind annähernd gleich den aktiven Hauptspannungsrichtungen s_1 , s_2 beziehungsweise s_3 , wenn ein Erdbeben mit der Verwerfungsbewegung übereinstimmt (Vorlesung: Bruchbildung). Das ist der Fall für eine nahezu optimale Orientierung der Verwerfung bei der Reaktivierung im Hinblick auf das regionale Spannungsfeld.

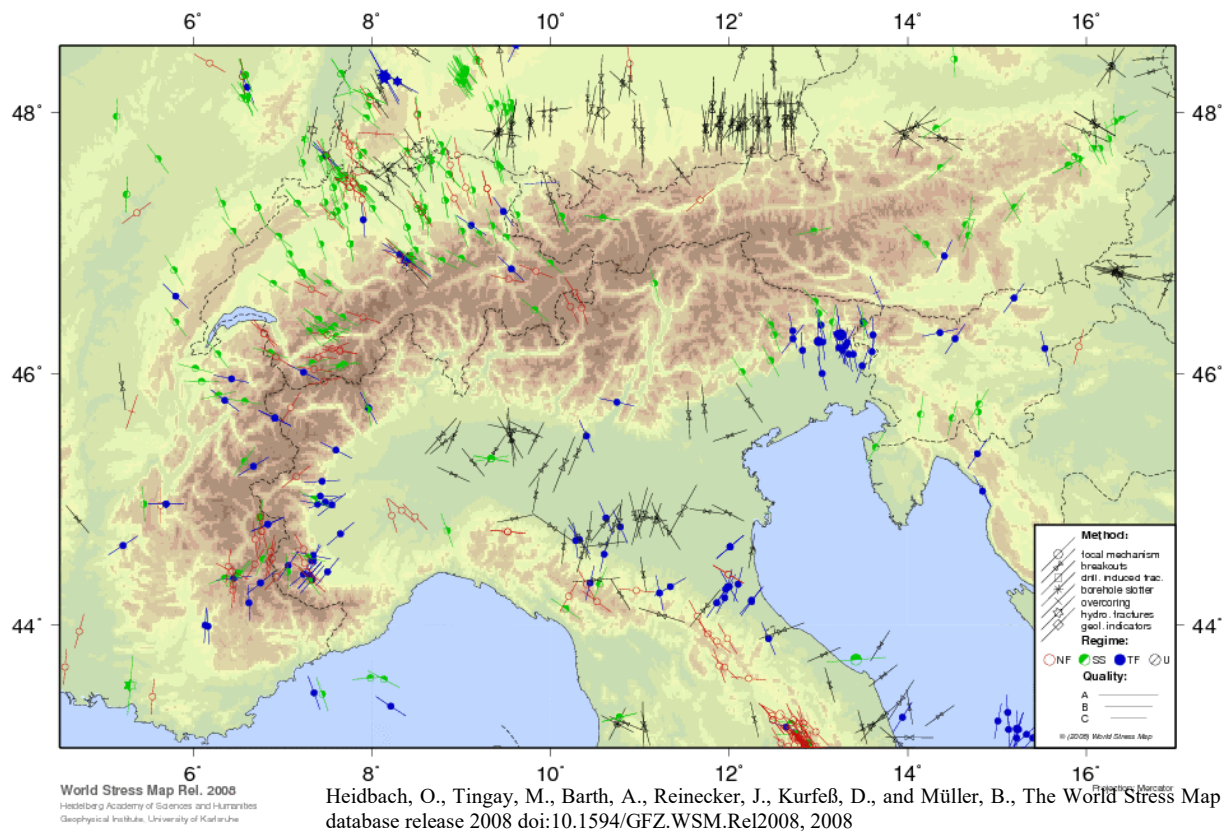
representative Herdlösungsmechanismen



Orientierung der Hauptspannungsachsen
(P Maximum, Kompression) T(Minimum, Extension) und B (intermediär)

Heutiges Spannungsfeld

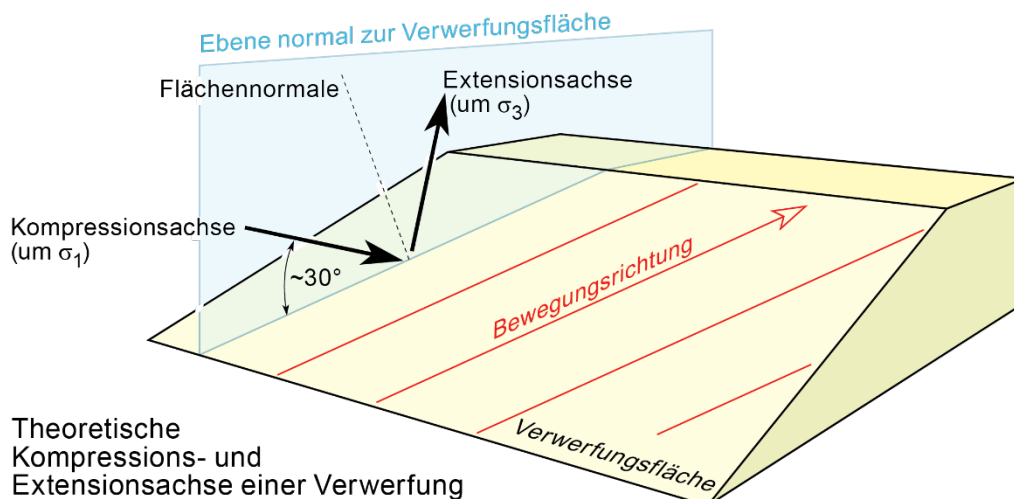
Die Ermittlung der Spannungen ist unvollständig und spärlich. Resultate zeigen, dass der Spannungszustand charakteristisch heterogen und in Ort und Zeit unvorhersehbar ist. Extrapolationen aus einzelnen Messpunkten bleiben sehr begrenzte Vereinfachungen des tatsächlichen Zustands, da lokale Störungen durch lokale geologische Eigenschaften bestimmt werden.



Jedoch zeigen Messungssynthesen das Bestehen der bemerkenswert konstanten "Andersonian" Spannungprovinzen, mit zwei der horizontalen Hauptspannungen und der vertikalen Spannung gleich σ_1 (Extensionsregime), σ_2 (Blattverschiebungsregime) oder σ_3 (Kompressionsregime). Das herkömmliche Auftreten von anthropogener Seismizität während der Reservoir-Auffüllung und von Erdbeben ausgelösten Erdbeben schlägt vor, dass die kontinentale Kruste global in einem Zustand des Reibungsgleichgewichts ist.

Anwendung auf geologische Strukturen

Es ist sehr wenig über das Spannungsfeld bekannt, das in Gesteinen während der Deformation herrscht, obwohl es eines der obersten Ziele des Faches ist, dieses Feld so genau wie möglich zu beschreiben. Diese Lücke an Wissen resultiert teilweise aus der Komplexität der Spannungsfelder, die in verformenden Körpern herrschen, aber hauptsächlich aus einem allgemeinen Mangel an Informationen zu den mechanischen Eigenschaften von Gesteinen.



Die Anwendung von Normal- und Scherspannungen kann anhand zweier einfacher, geologischer Beispiele gezeigt werden: die Spannung auf einer Störung und die Spannung auf einer Schichtfläche, die beide eine Biegegleitfaltung durchmachen, resultiert aus entgegengesetzten Druckkräften. Klarerweise lassen sich der Sinn des Störungsversatzes und der Gleitung auf der Schichtfläche vorhersehen, wenn die Richtung der Kräfte bekannt ist, und umgekehrt.

Zusammenfassung

Die kinematische Analyse identifiziert vier Deformationskomponenten:

- Translation (Änderung des Orts)
- Rotation (Änderung der Orientierung)
- Dilatation (Änderung der Grösse) und
- Distorsion (Änderung der Form).

Spannung ist eine momentane Grösse, die als Kraft pro Flächeneinheit definiert ist. Die Spannungen an einem Punkt sind die Komponenten des Spannungsvektors in den drei Bezugsebenen.

Der Spannungstensor σ_{ij} ist eine mathematische Struktur, die die Kraft pro Flächeneinheit auf einer orientierten Fläche des Körpers bezeichnet. Das erste Tiefzeichen gibt die Richtung der Kraft an, und das zweite die Fläche des Würfels, auf der sie wirkt.

Es erfordert neun Zahlen und ein Koordinatensystem, um diese Tensorquantität zu definieren: Es ist ein zweiter-Ordnungs-Tensor. Die neun Vektorkomponenten des Spannungstensors entsprechen den neun Komponenten der Spannung. Die Spannungen lassen sich nicht durch Vektoraddition summiert werden.

Der Spannungszustand an einem Punkt wird durch die Grösse und die Richtungen von drei Hauptspannungen oder von den Normal- und Scherspannungen auf einer Fläche mit bekannter Richtung beschrieben. Dieser Spannungszustand an einem Punkt lässt sich durch ein Ellipsoid darstellen, wobei die Längen der Achsen durch die drei Hauptspannungen festgelegt werden. Diese drei Hauptspannungen haben die folgenden Eigenschaften:

- 1) Sie sind orthogonal zueinander;
- 2) Sie sind senkrecht auf den Flächen ohne Scherspannung.

Das Mohr-Diagramm setzt eine materielle Fläche in Beziehung zu den Spannungspunkten. Der Scherspannungszustand σ_S auf Flächen mit unterschiedlichen Richtungen beschreibt einen Kreis, der durch σ_1 und σ_3 auf dem Mohr-Diagramm läuft. Die Magnitude und die Richtung der Scherspannung σ_S gegen die Normalspannung σ_N können auf diesem graphisch dargestellt werden.

Die Spannungen in der Lithosphäre haben beides, tektonischen (Plattenbewegung, Vergraben / Ausgraben, Magmaintrusion) und nicht-tektonischen, lokalen (thermische Expansion / Kontraktion, Meteoriteneinschlag, Flüssigkeitskreisläufe) Ursprung. Die regionale Gleichförmigkeit der beobachteten Spannungsfelder argumentiert für einen dominierenden tektonischen Ursprung. Die Differentialspannung steuert die Verformung. Das Verständnis der Spannungen ist deshalb wichtig, um die Gesteinsverformung und die tektonischen Prozesse zu beschreiben, zu quantifizieren und vorauszusagen.

Empfohlene Literatur

- Hubbert M.K. & Rubey W.W. - 1959. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting: I. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting. *Geological Society of America Bulletin*. **70** (2), 115-166, 10.1130/0016-7606(1959)70[115:ROFPI]2.0.CO;2
- Jaeger J.C. - 1969. *Elasticity, fracture and flow: with engineering and geological applications*. third, Methuen & Co LTD and Science Paperback, London. 268 p.
- Jaeger J.C. & Cook N.G.W. - 1979. *Fundamentals of rock mechanics*. 3, Chapman and Hall, London. 593 p.

- Jaeger J.C., Cook N.G.W. & Zimmerman R.W. - 2007. *Fundamentals of rock mechanics. Fourth edition*. Blackwell Publishing, Oxford. 475 p.
- Means W.D. - 1976. *Stress and strain. Basic concepts of continuum mechanics for geologists*. Springer Verlag, New York. 339 p.
- Oertel G.F.M. - 1996. *Stress and deformation: a handbook on tensors in geology*. Oxford University Press, New York. 292 p.
- Pollard D.D. & Fletcher R.C. - 2005. *Fundamentals of structural geology*. Cambridge University Press, Cambridge. 500 p.